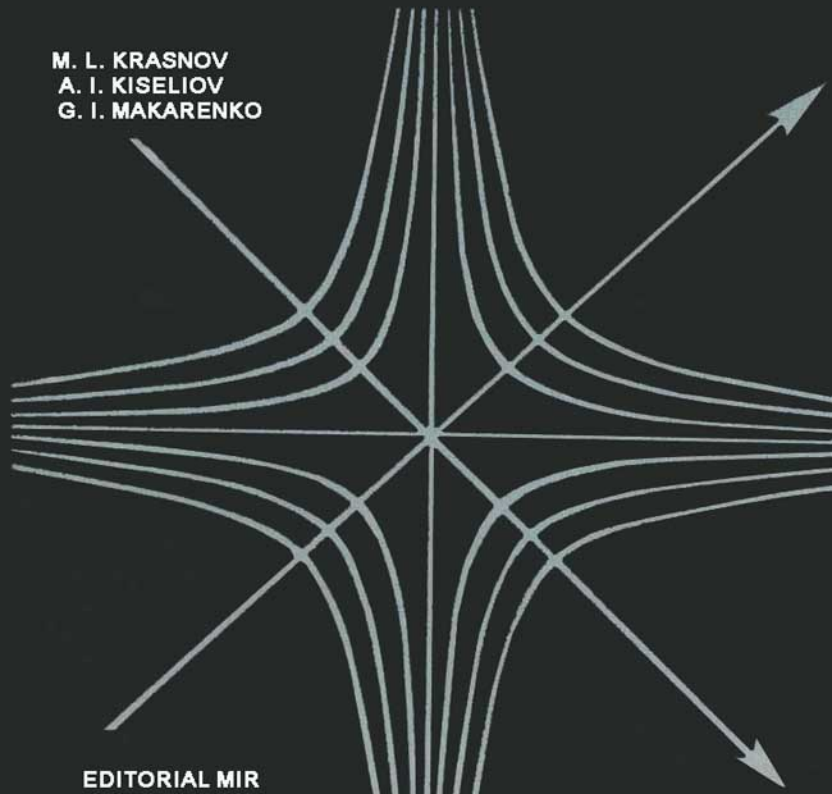
Análisis vectorial

M. L. KRASNOV
A. I. KISELIOV
G. I. MAKARENKO



EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

КРАСНОВ М. Л.
КИСЕЛЕВ А. И.
МАКАРЕНКО Г. И.

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Издательство «Наука»

M. L. KRASNOV
A. I. KISELIOV
G. I. MAKARENKO

Análisis vectorial

EDITORIAL MIR

Traducido del ruso por. T. Shapoválova
Impreso en la URSS 1981

На испанском языке

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978

© Traducción al español.
Editorial Mir. 1981

INDICE

Prefacio 7

CAPITULO I

FUNCION VECTORIAL DE UN ARGUMENTO ESCALAR 9

§ 1. Hodógrafa de función vectorial 9
§ 2. Límite y continuidad de función vectorial de un argumento escalar 11
§ 3. Derivada de una función vectorial por el argumento escalar 14
§ 4. Integración de la función vectorial del argumento escalar 18
§ 5. Derivadas primera y segunda de un vector respecto a la longitud del arco. Curvatura de una curva. Normal principal 26
§ 6. Plano osculador. Binormal. Torsión. Fórmulas de Frenet 29

CAPITULO II

CAMPO ESCALAR 33

§ 7. Ejemplos de campos escalares. Superficies y líneas del nivel 33
§ 8. Derivada respecto a la dirección 36
§ 9. Gradiente de un campo escalar 41

CAPITULO III

CAMPO VECTORIAL 49

§ 10. Líneas vectoriales. Ecuaciones diferenciales de las líneas vectoriales 49
§ 11. Flujo del campo vectorial. Métodos del cálculo del flujo 55
§ 12. Flujo del vector a través de la superficie cerrada. Teorema de Gauss—Ostrogradski 79

§ 13. Divergencia del campo vectorial. Campo solenoidal 83
§ 14. Integral lineal en el campo vectorial. Circulación del campo vectorial 90
§ 15. Rotor (rotacional) del campo vectorial 100
§ 16. Teorema de Stokes 103
§ 17. Independencia de la integral lineal de la vía de integración. La fórmula de Green 107

CAPITULO IV

CAMPO POTENCIAL 113

§ 18. Indicios de la potencialidad del campo 113
§ 19. Cálculo de la integral lineal en el campo potencial 115

CAPITULO V

OPERADOR DE HAMILTON. OPERACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN. OPERADOR DE LAPLACE 121

§ 20. Operador de Hamilton «nabla» 121
§ 21. Operaciones diferenciales del segundo orden. Operador de Laplace 125
§ 22. Potencial vectorial 136

CAPITULO VI

COORDENADAS CURVILINEAS. OPERACIONES PRINCIPALES DEL ANALISIS VECTORIAL EN LAS COORDENADAS CURVILINEAS 141

§ 23. Coordenadas curvilíneas 141
§ 24. Operaciones principales del análisis vectorial en las coordenadas curvilíneas 145
§ 25. Operador de Laplace en las coordenadas ortogonales 159

Respuestas 161
Suplemento I 168
Suplemento II 170
Bibliografía 171

PREFACIO

La buena preparación matemática del ingeniero moderno indudablemente contribuye a nuevos logros de la técnica en sus distintas ramas. Una de las disciplinas matemáticas de gran significado en formación de un ingeniero es el análisis vectorial, incluido hoy en los programas de los cursos de matemáticas superiores de centros de enseñanza técnica superior y universitarios.

La recolección de problemas de análisis vectorial propuesta, contiene el mínimo necesario de problemas y ejercicios del curso de análisis vectorial correspondiente al programa de los centros de enseñanza técnica superior.

En el comienzo de cada párrafo se expone la teoría básica y se brindan las resoluciones detalladas de un número suficientemente grande de problemas típicos. En el libro se analizan 100 ejemplos, además, se dan 314 problemas para ser resueltos por cuenta propia. En el libro hay algunos problemas de carácter aplicado, elegidos de tal modo, que el análisis de los mismos requiera del lector conocimientos complementarios de disciplinas especializadas. El material del sexto capítulo dedicado a las coordenadas curvilíneas y las operaciones principales del análisis vectorial está incluido en el manual para dar al lector posibilidad de adquirir los hábitos necesarios resolviendo una cantidad mínima de los problemas.

La metódica de exposición del material es semejante a la metódica de la cátedra de matemáticas superiores del Instituto energético de Moscú.

El libro puede ser considerado como un curso breve de análisis vectorial, en el que se comunican sin demostración los hechos básicos con ilustración de ejemplos concretos. Por eso, este manual puede ser empleado, por una parte, para repetir los fundamentos del análisis vectorial, y, por otra parte, como el libro de texto para los especialistas, los cuales sin entrar en la demostración de algunas teoremas y del material teórico, quieren dominar la técnica de operación del análisis vectorial.

Escribiendo el manual los autores utilizaron el material que contienen los cursos de operaciones vectoriales y otros manuales. La parte considerable de los problemas está compuesta por los autores.

Esta colección de problemas está dedicada a los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior, y, también para los estudiantes de otros centros que saben la álgebra vectorial y el análisis matemático en los límites del programa de los dos primeros años de estudio en los centros de enseñanza técnica superior.

Todas las observaciones y consejos dirigidos al mejoramiento del manual los aceptaremos con gratitud.

M. L. Krasnov
A. I. Kiseliov
G. I. Makárenko

CAPÍTULO I

FUNCION VECTORIAL DE UN ARGUMENTO ESCALAR

§ 1. HODOGRAFA DE FUNCIÓN VECTORIAL

Definición 1. Un vector r se llama *función vectorial* del argumento escalar t, si a cada valor del escalar del dominio de valores admisibles le corresponde un valor determinado del vector r. Vamos a escribirlo como sigue:

$$r = r\,(t).$$

Si el vector r es función del argumento escalar t

$$r = r\,(t),$$

entonces las coordenadas x, y, z del vector r son funciones del argumento t también:

$$x = x\,(t), \quad y = y\,(t), \quad z = z\,(t).$$

A la inversa, si las coordenadas del vector r son funciones de t, entonces la función de t será el mismo vector r:

$$r = x\,(t)\,i + y\,(t)\,j + z\,(t)\,k.$$

De tal modo, la expresión de la función vectorial $r\,(t)$ es igual a la expresión de tres funciones escalares $x\,(t)$, $y\,(t)$, $z\,(t)$.

Definición 2. *Hodógrafa* de la función vectorial $r\,(t)$ de un argumento escalar se llama el lugar geométrico de los puntos que describe extremo del vector $r\,(t)$ con el cambio del escalar t cuando el origen $r\,(t)$ se encuentra en un punto fijo O del espacio (fig. 1).

La hodógrafa del radio-vector $r = r\,(t)$ de un punto que se mueve es la misma trayectoria L de este punto. La hodógrafa de velocidad $v = v\,(t)$ de este punto es cierta otra línea L_1 (fig. 2). Por consiguiente, si un punto material traza una circunferencia con una velocidad constante $|\,v\,| = \text{const}$, entonces su hodógrafa de velocidades es también una circunferencia con centro en el punto O_1 y con radio igual a $|\,v\,|$.

Ejemplo 1. Construir la hodógrafa del vector $r = ti + tj + t^2k$.

Solución. 1°. Esta construcción se puede realizar según los puntos construyendo la tabla:

t	0	1	2	3	4
r	0	$i+j+k$	$2i+2j+4k$	$3i+3j+9k$	$4i+4j+16k$

2°. Se puede hallar otra solución: al denominar por medio de x, y, z las coordenadas del vector r tendremos

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t^2.$$

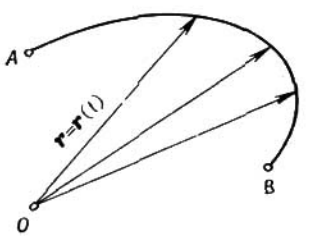


FIG. 1

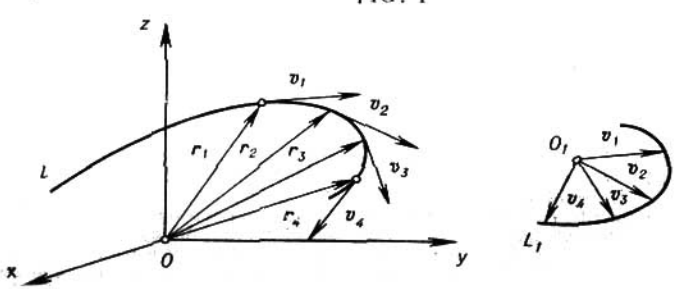


FIG. 2

Excluyendo de estas ecuaciones el parámetro t obtendremos las ecuaciones de las superficies $y = x$, $z = x^2$, la línea de intersección L de las cuales y determinará la hodógrafa del vector $r(t)$. (fig. 3).

1. Construir las hodógrafas de los vectores:

a) $r = 2i + t^2 j - t^2 k$.

c) $r = \frac{t^2+1}{(t+1)^2} i + \frac{2t}{(t+1)^2} j$.

c) $r = \cos t \cdot i + \operatorname{sen} t \cdot j + k$.

d) $r = ti + \frac{1}{3} t^2 j + \frac{1}{9} t^3 k$.

e) $r = \frac{2ti + tj + (t^2 - 2)\, k}{t^2 + 2}$.

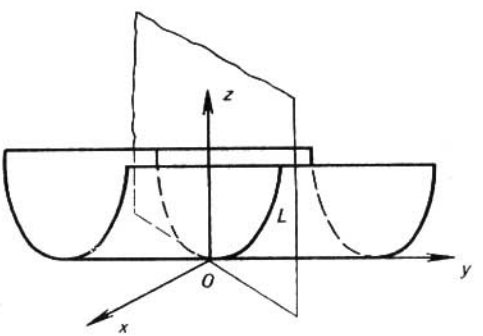


FIG. 3

§ 2. LIMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCION VECTORIAL DE UN ARGUMENTO ESCALAR

Sea determinada la función vectorial $r = r(t)$ del argumento escalar t en un entorno del valor t_0 del argumento t, excepto, puede ser el mismo valor t_0.

Definición 1. El vector constante A se llama *límite* del vector $r(t)$ con $t \to t_0$, si para cualquiera $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los $t \neq t_0$, que satisfacen la condición $|t - t_0| < \delta$, se cumpla la desigualdad

$$|r(t) - A| < \varepsilon.$$

Así como en el análisis ordinario escriben $\lim_{t \to t_0} r(t) = A$. Geométricamente esto significa que el vector $r(t)$ si $t \to t_0$ tiende al vector A tanto por la longitud como por la dirección (fig. 4).

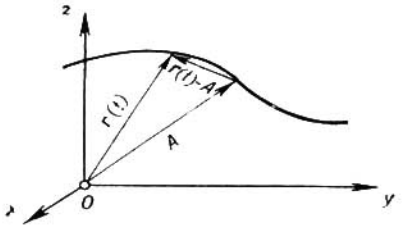


FIG. 4

Definición 2. El vector $\alpha(t)$ se llama *infinitamente pequeño* para $t \to t_0$ si $\alpha(t)$ tiene límite siendo $t \to t_0$ y éste es igual a cero:

$$\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = 0,$$

o, lo que es lo mismo, para cualquiera $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los $t \neq t_0$ que satisfacen la condición $|t - t_0| < \delta$, se cumple la desigualdad $|\alpha(t)| < \varepsilon$.

Ejemplo 1. Mostrar que el vector $\alpha(t) = ti + \operatorname{sen} tj$ es un vector infinitamente pequeño para $t \to 0$.

Solución. Tenemos

$$|\alpha(t)| = |ti + \operatorname{sen} tj| \leqslant |t| + |\operatorname{sen} t| \leqslant 2|t|,$$

de donde se ve que si para todo $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon/2$ entonces, con $|t - 0| < \delta = \varepsilon/2$, obtenemos $|\alpha(t)| < \varepsilon$. Conforme a la definición esto significa que $\alpha(t)$ es un vector infinitamente pequeño siendo $t \to 0$.

2. Mostrar que el límite del módulo del vector es igual al módulo de su límite, si el último límite existe.

3. Demostrar que para que la función vectorial $r(t)$ tenga el límite A con $t \to t_0$ es necesario y suficiente que $r(t)$ sea representado en forma de

$$r(t) = A + \alpha(t),$$

donde $\alpha(t)$ es un vector infinitamente pequeño para $t \to t_0$.

4. Mostrar que si las funciones vectoriales $a(t)$ y $b(t)$ tienen límites para $t \to t_0$:

$$\lim_{t \to t_0} a(t) = A, \quad \lim_{t \to t_0} b(t) = B,$$

entonces su suma $\boldsymbol{a}(t) + \boldsymbol{b}(t)$ y diferencia $\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{b}(t)$ también tienen límites siendo $t \to t_0$, con todo esto

$$\lim_{t \to t_0} [\boldsymbol{a}(t) \pm \boldsymbol{b}(t)] = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}.$$

5. Sea

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{A}, \quad \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{B}.$$

Demostrar que

$$\lim_{t \to t_0} (\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}),$$

donde $(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t))$ es el producto escalar de las funciones vectoriales $\boldsymbol{a}(t)$ y $\boldsymbol{b}(t)$.

6. Sea

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}.$$

Mostrar que si $\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{A}$, es que

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3.$$

Hallar los siguientes límites:

7. $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{\cos t - 1}{2t}\,\boldsymbol{j} + e^{t^2}\boldsymbol{k} \right)$.

8. $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1 - \sqrt{t}}{1 - t}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{t}{t+1}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \right)$.

9. $\lim\limits_{t \to \pi} \left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\boldsymbol{i} + \cos t \cdot \boldsymbol{j} + \dfrac{\boldsymbol{k}}{t + \pi} \right)$.

10. $\lim\limits_{t \to \pi} \left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \pi}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{1 + \cos t}{t}\,\boldsymbol{j} + \dfrac{t}{\pi}\,\boldsymbol{k} \right)$.

11. $\lim\limits_{t \to 1} \left(\dfrac{e^t - e}{t - 1}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{\ln t}{1 - t}\,\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \right)$.

Definición 3. La función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ definida en un entorno del valor de $t = t_0$ se llama *continua* para $t = t_0$ si

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0).$$

De otro modo, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ es continua siendo $t = t_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal, que para todo t que satisface la condición $|t - t_0| < \delta$, se cumple la desigualdad $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)| < \varepsilon$.

La hodógrafa de una función vectorial continua de argumento escalar es una curva continua.

12. Partiendo de la desigualdad conocida $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \geqslant \geqslant ||\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}||$, mostrar que de la continuidad de la función vectorial proporciona la continuidad de su módulo. ¿Es cierta la expresión inversa?

13. Mostrar que si $\boldsymbol{a}(t)$ y $\boldsymbol{b}(t)$ son continuas para $t = t_0$, entonces la función vectorial $\boldsymbol{a}(t) \pm \boldsymbol{b}(t)$ es continua también para $t = t_0$.

14. Función vectorial $\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{b}(t)$ es continua para $t = t_0$. ¿Se deduce de esto que los vectores $\boldsymbol{a}(t)$ y $\boldsymbol{b}(t)$ también son continuos para $t = t_0$?

15. Demostrar que si $\boldsymbol{a}(t)$ y $\boldsymbol{b}(t)$ son las funciones vectoriales continuas, el producto escalar $(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t))$ y producto vectorial $[\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)]$ también son continuos.

§ 3. DERIVADA DE UNA FUNCION VECTORIAL POR EL ARGUMENTO ESCALAR

Sea la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ determinada para todo t del intervalo (t_0, t_1). Tomemos un valor $t \in (t_0, t_1)$, demos a t el incremento Δt tal, que $t + \Delta t \in (t_0, t_1)$ y hallemos el incremento correspondiente $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ de la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$. Examinemos luego la relación $\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$.

Definición. Si con $\Delta t \to 0$ la relación $\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ tiene límite, entonces el mismo se llama *derivada* de la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ por el argumento escalar t para un valor dado t del argumento y se indica $\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$ (también $\boldsymbol{r}'(t)$ ó $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$). De tal modo

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}.$$

En este caso $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ se denomina *diferenciable*.

16. Mostrar que si la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ tiene derivada para cierto valor t del argumento, entonces ella es continua para este valor de t.

La derivada de la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ del argumento escalar t es un vector dirigido por tangente a la hodógrafa del vector inicial en el punto que consideramos (fig. 5). Con esto, el vector $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ está dirigido en el sentido del movimiento del extremo del vector $\boldsymbol{r}(t)$ por hodógrafa cuando el parámetro t se incrementa.

Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ radio vector de un punto en movimiento. Entonces $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ es el vector de velocidad de este punto.

Sea

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k},$$

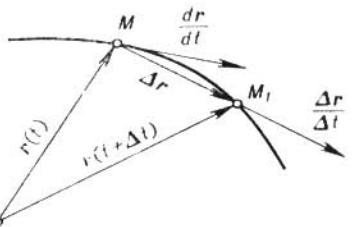


FIG. 5

donde las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son diferenciables en punto t. Entonces existe $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ para este valor de t y

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\,\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\,\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Ejemplo 1. Hallar $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}b\operatorname{sen} t$ (el punto se mueve por elipse).

Solución. Según la fórmula (1)

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\boldsymbol{i}a\operatorname{sen} t + \boldsymbol{j}b\cos t,$$

Por analogía con la diferencial de la función escalar *la de la función vectorial* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ es el vector $d\boldsymbol{r}$ que se determina por la igualdad

$$d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot dt,$$

donde $dt = \Delta t$ es el incremento del argumento escalar t.

Como también para las funciones escalares,

$$\Delta\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\alpha}\cdot\Delta t,$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t, \Delta t) \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

PRINCIPALES REGLAS DE DIFERENCIACION DE LAS FUNCIONES VECTORIALES

Supongamos que todas las funciones que consideramos (escalares y vectoriales) sean continuas y diferenciables.

1°. Si $\boldsymbol{c}$ es un vector constante, entonces $\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} = 0$.

2°. La derivada de la suma de las funciones vectoriales es igual a la suma de las derivadas

$$\frac{d(\boldsymbol{a}(t) + \boldsymbol{b}(t))}{dt} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$$

3°. Sea que la función vectorial $\boldsymbol{a}(t)$ se multiplica por la función escalar $m(t)$ del mismo argumento escalar. Entonces

$$\frac{d(m\boldsymbol{a})}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} + \frac{dm}{dt}\boldsymbol{a}.$$

$$4°.\ \frac{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{dt} = \left(\boldsymbol{a}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right) + \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right).$$

$$5°.\ \frac{d[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{dt} = \left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right] + \left[\boldsymbol{a}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right].$$

(En esta fórmula en el segundo miembro ha de observarse el mismo orden de los multiplicadores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ que en el primer miembro.)

Demostremos, por ejemplo, la fórmula 4°. Pongamos $\varphi(t) = (\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t))$. Demos a t el incremento Δt; debido a la propiedad distributiva para el producto escalar tendremos

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = (\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\Delta\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \Delta\boldsymbol{b}) + (\Delta\boldsymbol{a}, \Delta\boldsymbol{b}).$$

De donde

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}, \boldsymbol{b}\right) + \left(\boldsymbol{a}, \frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}\right) + \left(\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}, \Delta\boldsymbol{b}\right). \qquad (2)$$

Según la condición las funciones $\boldsymbol{a}(t)$ y $\boldsymbol{b}(t)$ tienen derivadas para el valor t del argumento y, por consiguiente, son continuas con este valor del t. Por eso

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt},\quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{b}}{dt},\quad y\quad \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\boldsymbol{b} = 0$$

Pasando en (2) al límite para $\Delta t \to 0$ obtenemos

$$\frac{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right) + \left(\boldsymbol{a}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right).$$

17. Dado $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Hallar las derivadas

a) $\frac{d}{dt}(r^2)$; b) $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$; c) $\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]$.

18. Demostrar que si el módulo $|r|$ de la función vectorial $r = r(t)$ permanece constante para todos los valores del t, es que $\frac{dr}{dt} \perp r$. ¿Cuál es el sentido geométrico de este fenómeno?

19. Demostrar que si e es el vector unitario de la dirección del vector E, entonces

$$[e, de] = \frac{[E, dE]}{|E|^2}.$$

20. Sea

$$u = u_1(x, y, z, t)\, i + u_2(x, y, z, t)\, j + u_3(x, y, z, t)\, k,$$

donde u_1, u_2, u_3 son las funciones continuamente diferenciables de sus argumentos, y x, y, z son las funciones continuamente diferenciables de t. Mostrar que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}.$$

21. Hallar la trayectoria del movimiento para el cual el radio vector $r(t)$ del punto que se mueve satisface la condición $\frac{dr}{dt} = [a, r]$ donde a es un vector constante.

La derivada $\frac{dr}{dt}$ de la función vectorial $r(t)$ del argumento escalar, es la función vectorial del mismo argumento. Si existe derivada de $\frac{dr}{dt}$, ella se llama *derivada de segundo orden* y se indica $\frac{d^2r}{dt^2}$. En general

$$\frac{d^n r}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

22. Dado el radio vector de un punto que se mueve en el espacio

$$r\{a \operatorname{sen} t,\ -a \cos t,\ bt^2\}$$

(t es tiempo; a, b, son constantes). Hallar las hodógrafas de velocidad y de aceleración.

23. Dado: $r = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$, donde ω, a, b son constantes. Demostrar que

1) $\left[r, \frac{dr}{dt}\right] = [\omega a, b]$,

2) $\frac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = 0$.

24. Mostrar que si $r = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}$, donde a y b son los vectores constantes, entonces $\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = 0$.

25. Mostrar que el módulo de la diferencial del radio vector de un punto es igual a la diferencial de longitud del arco que traza el mismo punto.

26. Sea $a = a(u)$ la función vectorial del escalar u donde u a su vez es una función escalar del escalar básico t. Suponiendo que $a(u)$ y $u = u(t)$ son diferenciables tantas veces como sea necesario, hallar la expresión para las derivadas de la función compuesta $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$.

§ 4. INTEGRACION DE LA FUNCION VECTORIAL DEL ARGUMENTO ESCALAR

Definición 1. Denominemos la función vectorial $A(t)$ *función primitiva* para la función vectorial $a(t)$ para $t_0 < t < t_1$ si $A(t)$ es diferenciable y

$$\frac{dA}{dt} = a(t), \qquad t \in (t_0, t_1).$$

Definición 2. *Integral indefinida* de la función vectorial del argumento escalar $a = a(t)$ se llama el conjunto de todas las funciones primitivas para $a(t)$. La integral indefinida de la función vectorial al igual que en el cálculo integral se denomina con el signo $\int$. Tenemos

$$\int a(t)\,dt = A(t) + C,$$

donde $A(t)$ es alguna de las funciones primitivas para $a(t)$, C es un vector constante arbitrario.

Para las integrales de las funciones vectoriales son válidas las propiedades siguientes:

1°. $\int \alpha a(t)\,dt = \alpha \int a(t)\,dt$ (α es una constante numérica)

2°. $\int (a(t) \pm b(t))\,dt = \int a(t)\,dt \pm \int b(t)\,dt,$

27. Mostrar que si c es vector constante y $a(t)$ es vector variable, entonces,

$$\int (c, a(t))\,dt = \left(c, \int a(t)\,dt\right),$$

$$\int [c, a(t)]\,dt = \left[c, \int a(t)\,dt\right].$$

Si

$$a(t) = a_1(t)\,i + a_2(t)\,j + a_3(t)\,k$$

entonces

$$\int a(t)\,dt = i\int a_1(t)\,dt + j\int a_2(t)\,dt + k\int a_3(t)\,dt, \qquad (1)$$

es decir, la integración de la función vectorial se reduce a tres integraciones ordinarias.

Ejemplo 1. Hallar la integral indefinida para la función vectorial $a(t) = i\cos t + je^{-t} + k$.

Solución. Según la fórmula (1)

$$\int a(t)\,dt = i\int \cos t\,dt + j\int e^{-t}\,dt + k\int dt =$$

$$= i\operatorname{sen} t - je^{-t} + kt + c,$$

donde c es un vector constante arbitrario.

Hallar las integrales de las funciones vectoriales siguientes:

28. $a(t) = te^t i + \operatorname{sen}^2 t \cdot j - \dfrac{k}{1+t^2}$.

29. $a(t) = \dfrac{ti}{1+t^2} + te^{t^2} j + \cos t \cdot k$.

30. $a(t) = \cos t\, e^{\operatorname{sen} t} \cdot i - t\cos t^2 \cdot j + k$.

31. $a(t) = \dfrac{1}{2}t^2 i - t\operatorname{sen} t \cdot j + 2^t k$.

Sea la función vectorial $a(t)$ determinada y continua en un tramo $[t_0, T]$ de la variación del argumento t.

Definición 3. Se llama *integral definida* de la función vectorial $a(t)$ en el tramo $[t_0, T]$, el límite de sumas vectoriales integrales

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} a(\tau_k)\,\Delta t_k, \qquad \tau_k \in [t_k,\ t_{k+1}],$$

cuando la longitud Δt del mayor de los segmentos $[t_k,\ t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, en los que está dividido el tramo $[t_0, T]$ tiende a cero:

$$\int_{t_0}^{T} a(t)\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} a(\tau_k)\,\Delta t_k.$$

Es válida la fórmula

$$\int_{t_0}^{T} \boldsymbol{a}(t)\,dt = \boldsymbol{A}(T) - \boldsymbol{A}(t_0), \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{A}(t)$ es una primitiva cualquiera para la función $\boldsymbol{a}(t)$ en $[t_0, T]$.

Si

$$\boldsymbol{a}(t) = a_1(t)\,\boldsymbol{i} + a_2(t)\,\boldsymbol{j} + a_3(t)\,\boldsymbol{k},$$

entonces

$$\int_{t_0}^{T} \boldsymbol{a}(t)\,dt = \boldsymbol{i}\int_{t_0}^{T} a_1(t)\,dt + \boldsymbol{j}\int_{t_0}^{T} a_2(t)\,dt + \boldsymbol{k}\int_{t_0}^{T} a_3(t)\,dt. \tag{3}$$

Ejemplo 2. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{a}(t)\,dt$, donde $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{i}\cos t - \boldsymbol{j}\,\operatorname{sen}^2 t$.

Solución. En virtud de la fórmula (3)

$$\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{a}(t)\,dt = \boldsymbol{i}\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt - \boldsymbol{j}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\,dt =$$

$$= \operatorname{sen} t\Big|_0^{\pi/2} - \boldsymbol{j}\left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \boldsymbol{i} - \frac{\pi}{4}\,\boldsymbol{j}.$$

Calcular las integrales siguientes:

32. $\displaystyle\int_0^{\pi} \boldsymbol{a}(t)\,dt$, donde $\boldsymbol{a} = \operatorname{sen}^2 t \cos t \cdot \boldsymbol{i} + \cos^2 t \times$

$\times \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

33. $\displaystyle\int_0^{1} \boldsymbol{a}(t)\,dt$, donde $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{i}e^{-t/2}}{2} + \frac{\boldsymbol{j}e^{t/2}}{2} + \boldsymbol{k}e^{t}$.

34. $\displaystyle\int_0^{1} \boldsymbol{a}(t)\,dt$, donde $\boldsymbol{a} = 3\pi \cos \pi t \cdot \boldsymbol{i} - \frac{1}{1+t} + 2t\boldsymbol{k}$.

35. $\displaystyle\int_0^{\pi} \boldsymbol{a}(t)\,dt$, donde $\boldsymbol{a} = (2t + \pi)\,\boldsymbol{i} + t \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{j} + \pi\boldsymbol{k}$.

Ejemplo 3. Una corriente eléctrica de fuerza I corre de abajo hacia arriba por un conductor infinito que coincide con el eje Oz.

Hallar el vector H de la intensidad del campo magnético que crea esta corriente en un punto arbitrario M (x, y, z) del espacio (fig. 6).

Solución. Examinemos un elemento suficientemente pequeño $PP_1 = d\zeta$ del eje Oz. Según la ley Bio—Savar la tensión dH del campo magnético que engendra en el punto M la corriente eléctrica

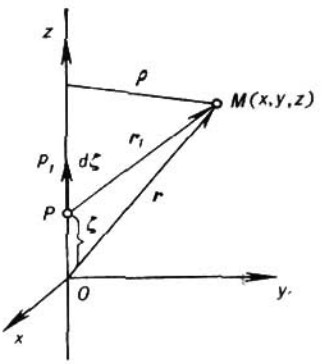


FIG. 6

que pasa por el elemento del conducto $d\zeta$, coincide en la dirección con el producto vectorial $[d\zeta, r_1]$, donde $d\zeta = \vec{PP_1}$, $| d\zeta | = d\zeta$, $r_1 = \vec{PM}$ (véase la fig. 6). Según esta misma ley el módulo del vector dH es igual a

$$| dH | = \frac{I}{r_1^2} \operatorname{sen} (d\zeta\ ,\ \hat{r}_1)\, d\zeta$$

donde $(\widehat{d\zeta, r_1})$ es el ángulo formado con los vectores $d\zeta$ y r_1. Debido a

$$| [d\zeta,\ r_1] | = r_1 d\zeta \operatorname{sen} (\widehat{d\zeta, r_1}),$$

se puede escribir

$$dH = \frac{I}{r_1^3} [d\zeta,\ r_1]. \tag{4}$$

Para obtener el vector buscado H en el punto M es necesario sumar todos los vectores dH que se refieren a los elementos diferentes PP_1 del conductor, es decir, integrar la expresión (4) por todo el eje Oz:

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{r_1^3} [d\zeta,\ r_1]. \tag{5}$$

Tenemos

$$r_1 = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP},$$

por eso

$$\overrightarrow{OM} = xi + yj + zk, \quad \overrightarrow{OP} = \zeta k,$$

es así que

$$r_1 = xi + yj + (z - \zeta)\, k,$$

$$r_1 = |\, r_1\, | = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2},$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del punto M hasta el eje del conductor.

Para el producto vectorial $[d\zeta,\ r_1]$ tenemos

$$[d\zeta,\ r_1] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & d\zeta \\ x & y & z-\zeta \end{vmatrix} = -iy\, d\zeta + jx\, d\zeta,$$

y la fórmula (5) toma la forma (el punto M $(x,\ y,\ z)$, es fija $I = \text{const}$)

$$H = I\,(-yi + xj) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{[\rho^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}}. \qquad (6)$$

Para calcular la integral en el segundo miembro (6) efectuamos la sustitución

$$\zeta - z = \rho \operatorname{tg} t, \qquad d\zeta = \frac{\rho\, dt}{\cos^2 t}.$$

Obtendremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{[\rho^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho\, dt}{\cos^2 t\, [\rho^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 t]^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{2}{\rho^2}.$$

Ahora bien, el vector de la intensidad H del campo magnético en nuestro caso se determina mediante la fórmula

$$H = \frac{2I}{\rho^2}\,(-yi + xj)$$

o

$$H = \frac{2}{\rho^2}\,[I,\ r],$$

donde $I = I \cdot k$ es el vector de la corriente, r es el radio vector del punto M $(x,\ y,\ z)$ del campo, ρ es la distancia del punto M hasta el eje del conductor.

Ejemplo 4. *Movimiento de un electrón en un campo magnético homogéneo.*

1°. Sea que en un dominio del espacio se ha creado un campo magnético H que es constante por su magnitud y dirección (campo homogéneo). Sea que en un momento de tiempo $t = t_0$ en este campo ingresa un electrón con velocidad inicial v_0. Determinar la trayectoria del electrón.

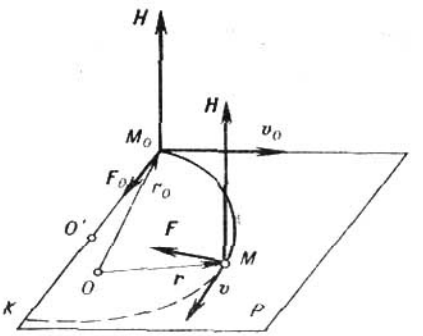


FIG. 7

Solución. Supongamos primeramente que el vector v_0 es perpendicular a H y que *la posición inicial del electrón es el punto* M_0. Tomemos el origen O en un punto arbitrario del plano P que pasa por el punto M_0 perpendicularmente al vector H (fig. 7). Sea r_0 el radio vector inicial $\overrightarrow{OM_0}$, r el radio vector del electrón en el momento dado de tiempo t, v la velocidad instantánea en este mismo momento. La ecuación diferencial básica del movimiento es

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F.$$

La fuerza F que actúa en el momento t sobre el electrón por parte del campo magnético, como se sabe, es igual a

$$F = -e_0[H, v],$$

donde e_0 es la magnitud absoluta de carga del electrón. De tal modo,

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = e_0[v, H]. \tag{7}$$

La fuerza F es perpendicular a la dirección de la velocidad y a la dirección del campo H en cada momento t; esta fuerza hará desviar el electrón en cada momento de su movimiento rectilíneo y trazar una trayectoria curvilínea.

Escribamos la ecuación (7) en la forma de

$$m\frac{dv}{dt} = e_0\left[\frac{dr}{dt},\ H\right]$$

e integrémosla con respecto a t desde t_0 hasta t. Obtendremos

o
$$mv - mv_0 = e_0[r,\ H] - e_0[r_0,\ H]$$
$$mv = e_0[r,\ H] + (mv_0 - e_0[r_0,\ H]). \qquad (8)$$

Escojamos ahora el origen de coordenadas O' de tal modo que el sumando que está entre paréntesis en el segundo miembro (8) se anule, es decir, para que

$$e_0[r_0,\ H] = mv_0. \qquad (9)$$

De (9) se deduce que el vector inicial r_0 debe ser perpendicular al vector v_0 y encontrarse en la línea recta M_0K, que es perpendicular al plano de los vectores v_0 y H. El módulo del vector r_0, en virtud de (9) debe satisfacer la expresión

$$e_0 \mid r_0 \mid \cdot \mid H \mid = m \mid v_0 \mid,$$

de donde

$$\mid r_0 \mid = \frac{m \mid v_0 \mid}{e_0 \mid H \mid}. \qquad (10)$$

Así se determina la posición del origen nuevo O'. Respecto a él la ecuación (8) se escribe como sigue:

$$mv = e_0[r,\ H] \qquad (11)$$

o

$$m\frac{dr}{dt} = e_0[r,\ H] \qquad (12)$$

De la ecuación (11) surge que la trayectoria del electrón será una curva plana que se encuentra en el plano P, puesto que el vector v en cada momento de tiempo es perpendicular a H. Multipliquemos ahora ambos miembros de la ecuación (12) escalarmente por r:

$$m\left(r,\ \frac{dr}{dt}\right) = e_0(r,\ [r,\ H]). \qquad (13)$$

El producto mixto del segundo miembro (13) es igual a cero, del este modo

$$\left(r,\ \frac{dr}{dt}\right) = 0.$$

De aquí

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d}{dt}(r^2) = 0, \quad \text{es decir } r^2 = \text{const}.$$

Esto es la ecuación de una circunferencia que se encuentra en el plano P, con el centro elegido en el punto O'. El radio de esta circunferencia se determina mediante la fórmula (10), ya que el punto inicial M_0 también debe encontrarse en esta circunferencia. Así,

definitivamente

$$r = r_0 = \frac{m \mid v_0 \mid}{e_0 \mid H \mid}.$$

De tal modo, si un electrón se mueve en un campo magnético homogéneo H a velocidad inicial v_0 que es perpendicular a H, aquél trazará en este campo una trayectoria circular en el plano P que es perpendicular a H y que pasa por el punto inicial. El radio de esta circunferencia se determina por medio de la fórmula (10) y su centro O' se encuentra en la línea recta perpendicular al plano de vectores v_0 y H. Al mismo tiempo el giro de v_0 a H debe ser visto desde el punto O' en sentido antihorario.

De la fórmula (10) se ve que el radio r_0 de la circunferencia es inversamente proporcional a $\mid H \mid$. De tal modo cuanto más fuerte es la intensidad del campo magnético tanto mayor es la curvatura de la trayectoria.

De la fórmula (11)

$$mv = e_0 [r, H]$$

se ve que si r es constante en su módulo y todo el tiempo es perpendicular a H, entonces la velocidad v es constante en la magnitud:

$$\mid v \mid = v_0 = \text{const},$$

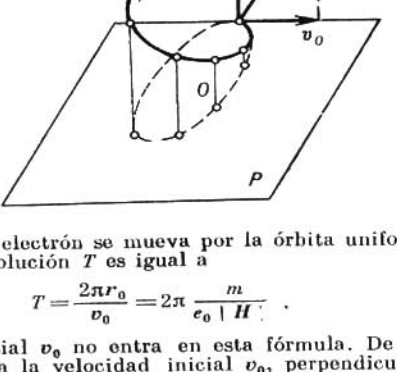


FIG. 8

de manera que el electrón se mueva por la órbita uniformemente. El período de revolución T es igual a

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi \frac{m}{e_0 \mid H \mid}.$$

La velocidad inicial v_0 no entra en esta fórmula. De tal modo, cualquiera que sea la velocidad inicial v_0, perpendicular a H, a que cayese el electrón en el campo magnético homogéneo, el mismo realizará una revolución por órbita siempre en el mismo tiempo T, independientemente de la magnitud v_0.

2°. Supongamos ahora que el electrón se encuentra en el campo magnético homogéneo H a cualquier velocidad inicial V que no es perpendicular al vector H. Entonces, esta velocidad v se puede descomponer en dos componentes: el vector v_0 dirigido perpendicularmente al campo y el vector v_1 dirigido a lo largo del campo magnético.

De la fórmula

$$F = e\,[V,\ H] = e_0\,[v_0,\ H]$$

se ve que la fuerza «retorcedora» F se determina solamente con la componente perpendicular v_0 y que la última le dará al electrón el movimiento rotatorio por el círculo (con el centro en O'), que hemos examinado arriba. Respecto a la segunda componente, v_1 el electrón la va a conservar por inercia y además del movimiento circular uniforme tendrá también un movimiento rectilíneo y uniforme a lo largo de la dirección H a velocidad $v_1 = |\,V\,| \cos \alpha$. La combinación de estos movimientos producirá una línea helicoidal con eje paralelo al vector H, la cual pasa por el punto O' (fig. 8).

§ 5. DERIVADAS PRIMERA Y SEGUNDA DE UN VECTOR RESPECTO A LA LONGITUD DEL ARCO. CURVATURA DE UNA CURVA. NORMAL PRINCIPAL

Estudiemos en el espacio alguna línea L. Escojamos en ella un punto cualquiera M_0 como el punto de referencia y también escojamos alguna dirección a lo largo de la línea L que suponemos positiva. En calidad de parámetro tomemos la longitud del arco s partiendo del punto M_0 de la curva (fig. 9). Entonces el radio vector del punto M de la curva será

$$r = r\,(s).$$

Al elegir dicho parámetro tenemos

$$\frac{dr}{ds} = \tau^0$$

donde τ^0 es el vector unitario orientado por la tangente a la línea L en dirección del crecimiento del parámetro s.

Si el vector r está dado por las coordenadas

$$r = xi + yj + zk,$$

entonces

$$\tau^0 = \frac{dx}{ds}\,i + \frac{dy}{ds}\,j + \frac{dz}{ds}\,k,$$

con todo eso

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1,$$

Puesto que $|\tau^0| = 1$, el vector $\frac{d\tau^0}{ds}$ es ortogonal al vector τ^0.

El módulo del vector $\frac{d\tau^0}{ds}$

$$\left|\frac{d\tau^0}{ds}\right| = K.$$

Aquí K es la curvatura de la línea L en el punto M.

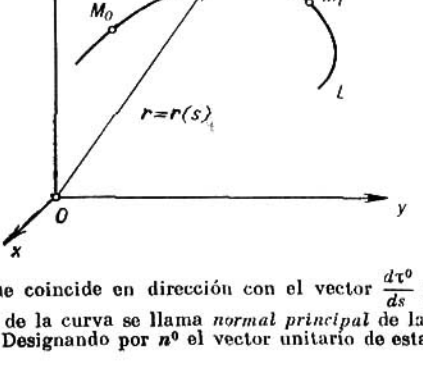


FIG. 9

La recta que coincide en dirección con el vector $\frac{d\tau^0}{ds}$ y pasa por el punto M de la curva se llama *normal principal* de la curva en el punto M. Designando por n^0 el vector unitario de esta dirección tendremos

$$\frac{d\tau^0}{ds} = Kn^0. \tag{1}$$

La magnitud, inversa a la curvatura de la curva en el punto dado, se llama *radio de curvatura* de la curva en este punto y se designa por R:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Debido a esto la fórmula (1) se puede escribir como sigue:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\tau^0}{ds} = \frac{n^0}{R}.$$

De donde

$$K = \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|$$

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{2}$$

La fórmula (2) permite calcular la curvatura de una línea en un punto cualquiera si esta línea está prefijada por sus ecuaciones paramétricas, en las que el parámetro es la longitud s del arco.

En el caso especial de una curva plana, de la circunferencia del radio a

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\frac{s}{a}, \\ y &= a\operatorname{sen}\frac{s}{a} \end{aligned}\right\}$$

tenemos

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{sen}\frac{s}{a},$$

y la fórmula (2) da

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}^2\frac{s}{a}} = \frac{1}{a},$$

es decir, la curvatura de la circunferencia de radio a es constante e igual a la magnitud inversa al radio de circunferencia.

Si la línea L es determinada por la ecuación vectorial paramétrica $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, donde el parámetro t es arbitrario, entonces

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left|\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^3}. \tag{3}$$

La fórmula (3) permite calcular la curvatura de una curva en un punto cualquiera siendo prefijada arbitrariamente paramétrica esta curva.

Ejemplo 1. Calcular la curvatura de una línea helicoidal

$$\boldsymbol{r} = a\cos t\cdot\boldsymbol{i} + a\operatorname{sen} t\cdot\boldsymbol{j} + ht\boldsymbol{k}.$$

Solución. Puesto que

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -a\operatorname{sen} t\cdot\boldsymbol{i} + a\cos t\cdot\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -a\cos t\cdot\boldsymbol{i} - a\operatorname{sen} t\cdot\boldsymbol{j},$$

el producto vectorial será

$$\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\operatorname{sen} t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} = ah\operatorname{sen} t\cdot\boldsymbol{i} - ah\cos t\cdot\boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k}.$$

Por consiguiente,

$$\left|\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]\right| = a\sqrt{a^2+h^2}, \qquad \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2 \quad},$$

Debido a la fórmula (3) tenemos

$$K = \frac{1}{R} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

o

$$R = \frac{a^2 + b^2}{a} = \text{const.}$$

De tal modo, la línea helicoidal tiene un radio constante de curvatura.

Hallar el radio de curvatura de las líneas dadas:

36. $r = \ln \cos t \cdot i + \ln \operatorname{sen} t \cdot j + \sqrt{2t} \cdot k$.

37. $r = t^2 i + 2t^3 j$.

38. $r = 3t^2 i + (3t - t^3) j + 2k$, para $t = 1$.

39. $r = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) i + a(\operatorname{sen} t - t \cos t) j$ para $t = \pi/2$.

40. $r = a \operatorname{ch} t \cdot i + a \operatorname{sh} t \cdot j + atk$ en un punto t cualquiera.

§ 6. PLANO OSCULADOR. BINORMAL. TORSION. FORMULAS DE FRENET

El plano que pasa por la tangente y la normal principal a una curva dada L en el punto M se llama *plano osculador* en este punto M.

Cuando una curva es plana, el plano ocsulador coincide con el plano de la curva.

Si un vector $r = r(t)$ tiene derivada continua $\frac{dr}{dt}$ en un entorno del punto t_0 y, además, segunda derivada $\frac{d^2r(t_0)}{dt^2}$ tal, que

$$\left[\frac{dr(t_0)}{dt}, \frac{d^2r(t_0)}{dt^2}\right] \neq 0,$$

entonces en el punto $t = t_0$ *existe un plano osculador a la curva* $r = r(t)$, siendo la ecuación vectorial del cual

$$\left(\rho - r(t_0), \left[\frac{dr(t_0)}{dt}, \frac{d^2r(t_0)}{dt^2}\right]\right) = 0,$$

donde $\rho = \rho(t)$ es el radio vector del punto corriente del plano.

La normal a la curva en el punto M perpendicular al plano osculador de la curva en este punto se llama *binormal* de la curva en el punto dado M.

Designemos un vector unitario de binormal por b° y orientémoslo de tal modo que los vectores τ^0, n^0, b^0 formen una terna derecha (fig. 10). Entonces

$$b^{02} = 1, \quad b^0 = [\tau^0, \ n^0].$$

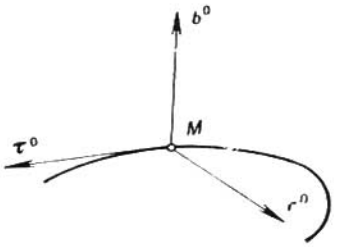


FIG.10

Para la derivada $\frac{db^0}{ds}$ obtenemos

$$\frac{db^0}{ds} = \left[\tau^0, \frac{dn^0}{ds}\right].$$

El vector $\frac{db^0}{ds}$ es perpendicular al vecto τ^0 y al vector b^0, o sea, él es colineal al vector n^0. Basándose en esto se puede escribir

$$\frac{db^0}{ds} = \frac{1}{T} n^0.$$

La magnitud $\frac{1}{T}$ se llama *torsión* de la curva dada y la magnitud T *radio de torsión* de la curva.

La torsión de la curva se determina con la fórmula

$$\frac{1}{T} = R^2 \left(\frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \frac{d^3r}{ds^3}\right),$$

donde el símbolo (a, b, c) designa el producto mixto de los vectores a, b, c, es decir, $(a, b, c) = (a, [b, c])$.

En el caso, cuando la curva está prefijada por la ecuación vectorial paramétrica $r = r(t)$ tenemos

$$\frac{1}{T} = \frac{\left(\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \frac{d^3r}{dt^3}\right)}{\left|\left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}\right]\right|^2}.$$

Ejemplo 1. Hallar la torsión de una línea helicoidal

$$r = a \cos t \cdot i + a \operatorname{sen} t \cdot j + htk.$$

Solución. Hallamos las derivadas del vector dado

$$\frac{dr}{dt} = -a \operatorname{sen} t \cdot i + a \cos t \cdot j + hk,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -a \cos t \cdot i - a \operatorname{sen} t \cdot j.$$

$$\frac{d^3r}{dt^3} = a \operatorname{sen} t \cdot i - a \cos t \cdot j.$$

El producto mixto de estos vectores es

$$\left(\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \frac{d^3r}{dt^3}\right) = \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} t & a \cos t & h \\ -a \cos t & -a \operatorname{sen} t & 0 \\ a \operatorname{sen} t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 h.$$

En el ejemplo 1, § 5 está hallado que

$$\left|\left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}\right]\right|^2 = a^2 (a^2 + h^2).$$

Utilizando la fórmula (1) obtenemos para la torsión

$$\frac{1}{T} = \frac{h}{a^2 + h^2}.$$

De tal modo, la torsión de la línea helicoidal en todos sus puntos es la misma.

Ejemplo 2. *Escribir la ecuación del plano osculador en el punto* $t = 0$ de la línea helicoidal

$$r = a \cos t \cdot i + a \operatorname{sen} t \cdot j + htk.$$

Solución. Hallamos los valores de las derivadas del vector dado y sus derivadas $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{d^2r}{dt^2}$ en el punto $t = 0$:

$$r(0) = ai, \quad \frac{dr(0)}{dt} = aj + hk, \quad \frac{d^2r(0)}{dt^2} = -ai.$$

Por consiguiente (véase ejemplo 1, § 5),

$$\left[\frac{dr(0)}{dt}, \frac{d^2r(0)}{dt^2}\right] = -ahj + a^2k.$$

La ecuación vectorial del plano osculador es

$$\left(\rho - r(0), \frac{dr(0)}{dt}, \frac{d^2r(0)}{dt^2}\right) = 0$$

o

$$(\rho - ai, \ -ahj + a^2k) = 0.$$

Puesto que el radio vector del punto corriente del plano osculador es $\rho = xi + yj + zk$, entonces en la forma de coordenadas obtendremos la ecuación del plano que buscamos en la forma siguiente $hy - az = 0$.

Las fórmulas que expresan las derivadas de vectores τ^0, b^0, n^0 se llaman *fórmulas de Frenet*:

$$\frac{d\tau^0}{ds}=\frac{1}{R}n^0, \quad \frac{db^0}{ds}=\frac{1}{T}n^0, \quad \frac{dn^0}{ds}=-\frac{1}{R}\tau^0-\frac{1}{T}b^0.$$

41. Escribir la ecuación del plano osculador en el punto $t = 2$ de la curva

$$r = ti - tj + \frac{1}{2}t^2k.$$

42. Escribir la ecuación del plano osculador en el punto $t = 0$ de la curva

$$r = e^t i + e^{-t} j + \sqrt{2}tk.$$

43. Hallar la torsión en el punto $t = 0$ de la curva

$$r = e^t \cos t \cdot i + e^t \operatorname{sen} t \cdot j + e^t k.$$

44. Hallar la torsión en un punto cualquiera t de la curva

$$r = a \operatorname{ch} t \cdot i + a \operatorname{sh} t \cdot j + at \cdot k.$$

CAPÍTULO II

CAMPO ESCALAR

§ 7. EJEMPLOS DE CAMPOS ESCALARES. *SUPERFICIES Y LINEAS DEL NIVEL*

Definición. Si en cada punto del espacio o en una parte del mismo, está determinado el valor de alguna mangitud, entonces se dice que está prefijado el *campo* de la magnitud dada.

El campo se llama *escalar*, si la magnitud que examinamos es escalar, es decir, se caracteriza completamente por su valor numérico.

Ejemplo de los campos escalares da el campo de temperaturas, el campo electroestático.

La definición del campo escalar se realiza por medio de la función escalar del punto M

$$u = f(M).$$

Si en el espacio está introducido el sistema de coordenadas cartesianas xyz, entonces

$$u = f(x, y, z).$$

De característica geométrica del campo escalar sirven las superficies de nivel, es decir, un lugar geométrico de los puntos en los cuales la función escalar del campo tiene el mismo valor. La superficie del nivel del campo dado se determina con la ecuación

$$f(x, y, z) = C, \quad \text{donde } C = \text{const}.$$

En el caso de un campo de temperaturas que engendra una fuente punteada de calor en un medio homogéneo e isotrópico las superficies del nivel serán las esferas con un centro en la fuente de calor (campo central y simétrico).

En el caso de un filamento infinito calentado proporcionalmente las superficies de nivel (las superficies isotérmicas) serán los cilindros circulares, el eje de los cuales coincide con el filamento.

Ejemplo 1. Construir las superficies de nivel del campo escalar

$$u = x + 2y + 3z.$$

Solución. Las superficies de nivel se determinan por la ecuación

$$x + 2y + 3z = C, \quad \text{donde } C = \text{const}.$$

Esto es una familia uniparamétrica de planos paralelos.

Ejemplo 2. Hallar las superficies de nivel del campo escular

$$u = x^2 + y^2 - z^2.$$

Solución. Las superficies de nivel se determinan por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = C, \quad \text{donde } C = \text{const},$$

Para $C = 0$ obtenemos un cono circular. Para cualquier $C > 0$ obtenemos hiperboloide de una hoja de revolución, cuyos ejes coinciden con el eje Oz. Para $C < 0$ obtenemos el hiperboloide de dos hojas.

Ejemplo 3. Hallar las superficies de nivel del campo escalar

$$u = \operatorname{arc\,sen} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Solución. El campo de definición del campo escalar dado se halla de la desigualdad

$$\left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leqslant 1, \quad \text{es decir } 0 \leqslant \frac{z^2}{x^2 + y^2} \leqslant 1,$$

de donde $0 \leqslant z^2 \leqslant x^2 + y^2$. Esta desigualdad doble muestra que el campo se determina fuera del cono circular $z^2 = x^2 + y^2$ y en el mismo, menos su vértice O (0, 0, 0).

Las superficies de nivel se determinan con la ecuación

$$\operatorname{arc\,sen} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C, \quad \text{donde } -\frac{\pi}{2} \leqslant C \leqslant \frac{\pi}{2},$$

es decir, $\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{sen} C$ o $z^2 = (x^2 + y^2) \operatorname{sen}^2 C$. Esta es la familia de los conos circulares situados fuera del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con el eje común de simetría Oz y el vértice común O (0, 0, 0), en el cual el campo dado no está determinado, además el mismo cono $z^2 = x^2 + y^2$ también entra en esta familia.

Ejemplo 4. Hallar las superficies de nivel del campo escalar

$$u = e^{(a, r)},$$

donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante, $\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto.

Solución. Aquí

$$\boldsymbol{r} = \{x, y, z\} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

y sea

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}.$$

Entonces el producto escalar será

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) = a_1x + a_2y + a_3z.$$

La ecuación de las superficies de nivel será

$$e^{(a, r)} = C, \qquad C > 0.$$

De aquí

$$(a, r) = \ln C$$

o

$$a_1x + a_2y + a_3z = \ln C.$$

Esta es una familia de planos paralelos.

Hallar las superficies de nivel de los siguientes campos escalares:

45. $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

46. $u = x^2 + y^2 - z$.

47. $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$.

48. $u = 2y^2 + 9z^2$.

49. $u = 3^{x+2y-z}$.

50. $u = \frac{(a, r)}{(b, r)}$ (a, b son vectores constantes).

51. $u = \ln |r|$.

52. $u = e^{(a, b, r)}$ (a, b son vectores constantes),

El campo escalar se llama *plano* si existe algún otro plano tal *que en todos los planos paralelos al indicado tiene el mismo campo* escalar.

Si tomamos este plano por el plano xOy, entonces el campo escalar se determina por la función escalar

$$u = f(x, y),$$

es decir no va a depender de z.

El campo de temperaturas de un filamento infinito calentado proporcionalmente sirve de ejemplo de campo escalar plano.

Las líneas de nivel, un lugar geométrico de los puntos en los cuales la función escalar tiene el mismo valor, sirven de característica geométrica del campo escalar.

Ejemplo 5. Hallar las líneas de nivel del campo escalar

$$u = x^2 - y^2.$$

Solución. *Las líneas de nivel se determinan por las ecuaciones*

$$x^2 - y^2 = C, \quad C = \text{const}.$$

Para $C = 0$ obtenemos un par de rectas

$$y = x, \quad y = -x.$$

Para $C \neq 0$ obtenemos una familia de hipérbolas (fig. 11).

Hallar las líneas de nivel de los siguientes campos planos:

53. $u = 2x - y$.

54. $u = \ln \sqrt{\frac{y}{2x}}$.

55. $u = \frac{y^2}{x}$.

56. $u = e^{x^2 - y^2}$.

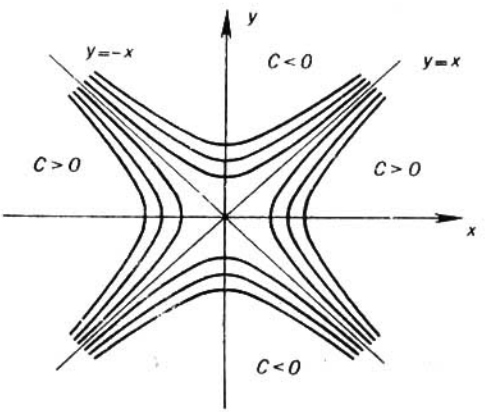


FIG. 11

57. Hallar las líneas de nivel del campo escalar u, dado implícitamente por la ecuación

$$u + x \ln u + y = 0.$$

§ 8. DERIVADA RESPECTO A LA DIRECCIÓN

Supongamos que tenemos un campo escalar que se determina por la función escalar

$$u = f(M).$$

Tomemos en el campo un punto M_0 y elijamos alguna dirección determinada con el vector l. Tomamos en el campo otro punto

M de tal modo que el vector M_0M sea paralelo al vector l. Anotemos mediante Δu la diferencia

$$\Delta u = f(M) - f(M_0),$$

y por medio de Δl designemos la longitud del vector M_0M. La relación $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ determina la velocidad media del cambio del campo escalar por la unidad de longitud respecto a la dirección dada. Vamos a tender el punto M hacia M_0 de tal modo que el vector M_0M permanezca todo el tiempo colineal al vector l. Con eso $\Delta l \to 0$.

Definición. Si para $\Delta l \to 0$ existe el límite de la relación $\frac{\Delta u}{\Delta l}$, entonces éste se llama *derivada* de la función $u = f(M)$ en el punto dado M_0 respecto a la dirección l y se anota con el símbolo $\frac{\partial u}{\partial l}$, así que por definición

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l}, \quad M_0M \parallel l.$$

Esta definición de la derivada respecto a la dirección tiene carácter invariante, es decir, no está relacionada con la elección del *sistema de coordenadas*.

Sea que en el espacio está introducido el sistema de coordenadas cartesianas y sea que la función $f(M) = f(x, y, z)$ es diferenciable en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Entonces

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma, \qquad (1)$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son cosenos directrices del vector

$$l = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

y se hallan según las fórmulas

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|l|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|l|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|l|},$$

$$|l| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Los símbolos $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}$ significan que las derivadas parciales se toman en el punto M_0.

Para un campo plano $u = f(x, y)$ la derivada respecto a la dirección l en el punto $M_0(x_0, y_0)$ será igual a

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \operatorname{sen}\alpha, \qquad (2)$$

donde α es el ángulo formado por el vector l con el eje Ox.

Observación. Las mismas derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ son las derivadas de la función u respecto a la dirección de los ejes de coordenadas Ox, Oy, Oz, respectivamente.

La fórmula (1) para calcular la derivada respecto a la dirección se queda válida y en el caso cuando el punto M tiende al punto M_0 por la curva, para la cual el vector l es tangente en el punto M_0.

Ejemplo 1. Hallar la derivada del campo escalar

$$u = xyz$$

en el punto $M_0\,(1, -1, 1)$ en dirección del punto M_0 al punto $M_1\,(2, 3, 1)$.

Solución. Hallamos los cosenos directrices del vector $\overrightarrow{M_0M_1} = \{1, 4, 0\}$, la longitud del cual es igual a $|\overrightarrow{M_0M_1}| = \sqrt{17}$. Tenemos $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\gamma = 0$. Los valores de las derivadas parciales de la función $u = xyz$ en el punto $M_0 = (1, -1, 1)$ son iguales a

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = -1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -1.$$

Utilizando la fórmula (1), obtendremos

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = -\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} + 1 \cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

El hecho de que $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} > 0$, significa que en el punto M_0 el campo escalar incrementa en la dirección dada.

Ejemplo 2. Calcular la derivada del campo escalar

$$u = \operatorname{arctg} xy$$

en el punto $M_0\,(1, 1)$ que pertenece a la parábola $y = x^2$ respecto a la dirección de esta curva (en dirección del incremento de la abscisa).

Solución. Por la dirección l de la parábola $y = x^2$ en el punto $M_0\,(1, 1)$ se considera la dirección de la tangente a la parábola en este punto (fig. 12).

Sea que la tangente l a la curva en el punto M_0 forma con el eje Ox un ángulo α. Tenemos

$$y' = 2x; \quad \operatorname{tg}\alpha = y'|_{x=1} = 2,$$

de donde los cosenos directrices de la tangente son

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

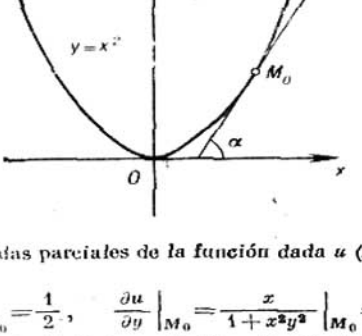


FIG. 12

Los valores de las derivadas parciales de la función dada $u(x, y)$ en el punto $M_0(1, 1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{1+x^2y^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo las magnitudes halladas en la fórmula (2), obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Ejemplo 3. Hallar la derivada del campo escalar $u = xz^2 + 2yz$ en el punto $M_0(1, 0, 2)$ a lo largo de la circunferencia

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+\cos t,\\ y &= \operatorname{sen} t - 1,\\ z &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Solución. La ecuación vectorial de la circunferencia tiene la forma

$$r(t) = (1+\cos t)\,i + (\operatorname{sen} t - 1)\,j + 2k.$$

Hallamos el vector τ, que es tangente a la circunferencia en cualquier punto M. Tenemos

$$\tau = \frac{dr}{dt} = -\operatorname{sen} t\cdot i + \cos t\cdot j.$$

El punto dado M_0 (1, 0, 2) se encuentra en el plano xOz en el primer octante y le corresponde el valor del parámetro $t = \frac{\pi}{2}$. En

este punto obtendremos

$$\tau|_{M_0} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot i + \cos\frac{\pi}{2}\cdot j = -i.$$

De aquí obtenemos que los cosenos directrices de la tangente a la circunferencia son iguales a $\cos\alpha = -1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$. Los valores de las derivadas parciales del campo escalar dado en el punto M_0 (1, 0, 2) son iguales a

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = z^2\Big|_{M_0} = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = z^2\Big|_{M_0} = 4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2xz + 2y)|_{M_0} = 4.$$

Por consiguiente, la derivada buscada es

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{M_0} = 4\cdot(-1) + 4\cdot 0 + 4\cdot 0 = -4.$$

En los problemas siguientes hallar para las funciones dadas la derivada en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0) respecto a la dirección al punto M_1 (x_1, y_1, z_1).

58. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1, 1, 1)$, $M_1(3, 2, 1)$.

59. $u = x^2y + xz^2 - 2$, $M_0(1, 1, -1)$, $M_1(2, -1, 3)$.

60. $u = xe^y + ye^x - z^2$, $M_0(3, 0, 2)$, $M_1(4, 1, 3)$.

61. $u = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$, $M_0(1, 1)$, $M_1(4, 5)$.

62. Hallar la derivada del campo escalar

$$u = \ln(x^2 + y^2)$$

en el punto M_0 (1, 2) de la parábola $y^2 = 4x$ en dirección de esta curva.

63. Hallar la derivada del campo escalar $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ en el punto M_0 (2, −2) de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x = 0$ a lo largo del arco de esta circunferencia.

64. Hallar la derivada del campo escalar $u = x^2 + y^2$ en el punto M_0 (x_0, y_0) de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, respecto a la dirección de esta circunferencia.

65. Hallar la derivada del campo escalar $u = 2xy + y^2$ en el punto $(\sqrt{2}, 1)$ de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ respecto

a la dirección de una normal exterior a la elipse en este punto.

66. Hallar la derivada del campo escalar $u = x^2 - y^2$ en el punto (5, 4) de la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$ respecto a la dirección de esta curva.

67. Hallar la derivada del campo escalar

$$u = \ln (xy + yz + xz)$$

en el punto M_0 (0, 1, 1) respecto a la dirección de la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 1$.

68. Hallar la derivada del campo escalar $u = x^2 + y^2 + z^2$ en el punto M_0 que corresponde al valor del parámetro $t = \frac{\pi}{2}$ respecto a la dirección de la línea helicoidal $x = R \cos t$, $y = R \operatorname{sen} t$, $z = at$.

§ 9. GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR

Sea un campo escalar determinado por la función escalar

$$u = f(x, y, z),$$

donde la función f se supone diferenciable.

Definición. El *gradiente* del campo escalar u en el punto dado M se llama el vector que se designa con el símbolo grad u y se determina por la igualdad

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\, i + \frac{\partial u}{\partial y}\, j + \frac{\partial u}{\partial z}\, k. \tag{1}$$

Utilizando la fórmula (1) del § 8 para la derivada respecto a la dirección tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u,\ l^0), \tag{2}$$

donde l^0 es el vector unitario de dirección l, es decir

$$l^0 = \frac{l}{|l|} = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma.$$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE

1. El gradiente está dirigido por la normal a la superficie del nivel (o a la línea de nivel, si el campo es plano).

2. El gradiente está dirigido en dirección del incremento de la función del campo.

3. El módulo del gradiente es igual a la derivada máxima respecto a la dirección en el punto dado del campo:

$$\text{máx}\,\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

donde el máximo se toma en cualesquiera direcciones en el punto dado del campo.

Estas propiedades proporcionan la característica invariante del gradiente. Esto significa que el vector grad u indica la dirección y la magnitud del cambio máximo del campo escalar en el punto dado.

Ejemplo 1. Hallar el gradiente del campo escalar

$$u = x - 2y + 3z.$$

Solución. Según la fórmula (1) tenemos

$$\text{grad } u = 1 \cdot \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}.$$

Las superficies de nivel del campo escalar dado son los planos $x - 2y + 3z = C$; el vector grad $u = \{1, -2, 3\}$ es el vector normal de los planos de esta familia.

Ejemplo 2. Hallar la curvatura máxima (velocidad) del incremento de la superficie $u = x^y$ en el punto M (2, 2, 4).

Solución. Tenemos

$$\text{grad } u = yx^{y-1}\boldsymbol{i} + x^y \ln x\boldsymbol{j}, \qquad \text{grad } u \mid_M = 4\boldsymbol{i} + 4\ln 2\boldsymbol{j},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\text{máx}} = |\text{grad } u| = 4\sqrt{1 + (\ln 2)^2}.$$

Ejemplo 3. Hallar el vector unitario de la normal a la superficie de nivel del campo escalar $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución. Las superficies de nivel del campo escalar dado son las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = C \qquad (C > 0).$$

El gradiente está dirigido por la normal a la superficie de nivel, de tal modo que grad $u = 2x \cdot \boldsymbol{i} + 2y \cdot \boldsymbol{j} + 2z \cdot \boldsymbol{k}$ determina el vector de la normal a la superficie de nivel en el punto M (x, y, z). Para el vector unitario de la normal obtenemos la expresión

$$\boldsymbol{n}^\circ = \frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

Ejemplo 4. Hallar el gradiente del campo $u = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores, $\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto.

Solución. Sea

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \quad \boldsymbol{r} = \{x, y, z\}.$$

Entonces

$$u = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Según la regla de diferenciación del determinante*) obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{grad} u=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k=$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=[a, b].$$

Ejemplo 5. Hallar el gradiente de la distancia

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

donde $P(x, y, z)$ *es el punto del campo que estudiamos,* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es algún punto fijo.

---

*) Sea dado el determinante $D(t)$, cuyos elementos a_{ij} son funciones diferenciables de t

$$D(t)=\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Entonces la derivada del determinante $D'(t)$ se halla mediante la fórmula

$$D'(t)=\begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}+\dots$$

$$\dots+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{n1}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Solución. Tenemos

$$\operatorname{grad} r = \frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{\partial r}{\partial z} k =$$

$$= \frac{(x - x_0) i + (y - y_0) j + (z - z_0) k}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = r^0$$

es el vector unitario de dirección $\overrightarrow{P_0P}$.

Ejemplo 6. Examinemos la función escalar

$$u = r_1 + r_2,$$

donde r_1, r_2 son las distancias de algún punto $P(x, y)$ del plano hasta los dos puntos fijos F_1 y F_2 del plano.

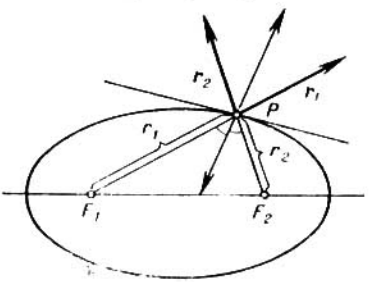


FIG. 13

Solución. Las líneas de nivel de esta función son elipses. Tenemos (vease el ejemplo 5)

$$\operatorname{grad}(r_1 + r_2) = r_1^0 + r_2^0.$$

Esto muestra que el gradiente es igual a la diagonal del rombo construido en versores de radios vectores trazados al punto P de los focos F_1 y F_2 (fig. 13). Por consiguiente, la normal a la elipse en su punto cualquiera parte en dos el ángulo entre los radios vectores trazados a este punto.

La interpretación física es: un rayo de luz salido de un foco cae al otro foco.

Ejemplo 7. Hallar el ángulo Θ entre los gradientes de las funciones

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad v = x + y + 2\sqrt{xy}$$

en el punto $M_0(1, 1)$.

Solución. *Hallamos los gradientes de las funciones dadas en* el punto M_0 (1, 1). Tenemos

$$\operatorname{grad} u|_{M_0} = \frac{xi+yj}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{M_0} = \frac{i+j}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{grad} v|_{M_0} = \left[\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)i+\left(1+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)j\right]\Big|_{M_0} = 2i+2j.$$

El ángulo Θ entre el grad u y el grad v en el punto M_0 se determina *de la igualdad*

$$\cos\Theta = \frac{(\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)|_{M_0}}{|\operatorname{grad} u|_{M_0}\cdot|\operatorname{grad} v|_{M_0}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}}{1\cdot 2\sqrt{2}} = 1.$$

De aquí $\Theta = 0$

Ejemplo 8. *Hallar la derivada respecto a la dirección del* radio vector r para la función $u = \operatorname{sen} r$, donde $r = |r|$.

Solución. Según la fórmula (2) la derivada de la función *dada por la dirección del radio vector r es igual a*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = (\operatorname{grad}\operatorname{sen} r,\ r^0). \tag{3}$$

Hallamos el gradiente de esta función:

$$\operatorname{grad}\operatorname{sen} r = \frac{\partial(\operatorname{sen} r)}{\partial x}i+\frac{\partial(\operatorname{sen} r)}{\partial y}j+\frac{\partial(\operatorname{sen} r)}{\partial z}k =$$

$$= \frac{d(\operatorname{sen} r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}i+\frac{d(\operatorname{sen} r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}j+\frac{d(\operatorname{sen} r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}k =$$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial x}i+\frac{\partial r}{\partial y}j+\frac{dr}{\partial z}k\right)\cos r = r^0\cos r. \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3) obtendremos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = (r^0\cos r,\ r^0) = (r^0,\ r^0)\cos r = \cos r.$$

Ejemplo 9. *Hallar la derivada del campo escalar* $u = f(x, y, z)$ en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de la línea l, prefijado por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= a,\\ \varphi(x, y, z) &= 0\end{aligned}\right\},\qquad a = \text{const}$$

en dirección de esta línea.

Solución. La dirección de la línea l se determina por la dirección de su vector tangente τ que, según la definición, es el vector tangente a la superficie $f(x, y, z) = a$. La superficie $f(x, y, z) = a$ es la superficie de nivel del campo escalar dado $u = f(x, y, z)$.

Ya que

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u,\ \boldsymbol{l}^0) = (\text{grad } u,\ \boldsymbol{\tau}^0)$$

y el vector grad u es perpendicular a la superficie de nivel $f(x, y, z) = a$ entonces el grad u es perpendicular y al versor $\boldsymbol{\tau}^0$, por eso

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = (\text{grad } u,\ \boldsymbol{\tau}^0)|_{M_0} = 0.$$

Ejemplo 10. Hallar en el punto M_0 (1, 1, 1) la dirección de la máxima variación del campo escalar $u = xy + yz + xz$ y la magnitud de esta máxima variación en este punto.

Solución. La dirección de la máxima variación del campo se indica con el vector grad u (M). Lo hallamos:

$$\text{grad } u\ (M) = (y + z)\ \boldsymbol{i} + (x + z)\ \boldsymbol{j} + (y + x)\ \boldsymbol{k}$$

y, en consecuencia, grad u $(M_0) = 2\ (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$. Este vector determina la dirección del máximo incremento del campo dado en el punto M_0 (1, 1, 1). La magnitud de la máxima variación del campo en este punto es igual a

$$\text{máx}\ \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u\ (M_0)| = 2\sqrt{3}.$$

69. Hallar el gradiente del campo escalar

$$u = \ln (x^2 + y^2 + z^2)$$

en el punto M_0 (1, 1, —1).

70. Hallar el gradiente del campo escalar $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$ en el punto O (0, 0, 0).

71. Hallar el ángulo φ entre los gradientes de la función $u = \text{arctg}\ \frac{x}{y}$ en los puntos M_1 (1, 1) y M_2 (—1, —1).

72. Hallar el ángulo φ entre los gradientes de la función $u = (x + y)\ e^{x+y}$ en los puntos M_1 (0, 0) y M_2 (1, 1).

73. Hallar el ángulo φ entre los gradientes de las funciones $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $v = \ln (x^2 + y^2 + z^2)$ en el punto M_0 (0, 0, 1).

74. Hallar los puntos, en los cuales el gradiente del campo escalar $u = \text{sen } (x + y)$ es igual a $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

75. Hallar los puntos, en los cuales el módulo del gradiente del campo escalar $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es igual a la unidad.

76. Sea $u = u(x, y, z)$ y $v = (x, y, z)$, funciones diferenciables en el punto $M(x, y, z)$. Mostrar que

a) grad $(\lambda u) = \lambda$ grad u, $\lambda = \text{const}$;

b) grad $(u \pm v) =$ grad $u \pm$ grad v;

c) grad $(uv) = v$ grad $u + u$ grad v;

d) grad $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2}$, $v \neq 0$.

77. Mostrar que

$$\text{grad } u(\varphi) = \frac{du}{d\varphi} \text{ grad } \varphi,$$

donde $\varphi = \varphi(x, y, z)$ es función diferenciable y $u = u(\varphi)$ tiene derivada respecto a φ.

Hallar los gradientes de los siguientes campos escalares, si

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son los vectores constantes.

78. $u = \ln r$.

79. $u = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$.

80. $u = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$.

81. $u = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}]|^2$.

82. Mostrar que

$$(\text{grad } u(r), \boldsymbol{r}) = u'(r) \cdot r.$$

83. Mostrar que

$$[\text{grad } u(r), \boldsymbol{r}] = 0.$$

84. Sea $w = f(u, v)$, donde $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$.

Demostrar que

$$\text{grad } w = \frac{\partial f}{\partial u} \text{ grad } u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{ grad } v,$$

si f, u, v, son funciones diferenciables.

85. Sea G una convexidad en el espacio, (es decir, un tal dominio que si dos puntos M y N pertenecen al dominio G entonces todo el segmento MN le pertenece). Sea en el dominio G dado el campo escalar $u(M)$, que tiene en todos los puntos gradiente continuo y limitado en G:

$$|\text{grad } u(M)| \leqslant A, \quad M \in G, \quad A = \text{const}.$$

Demostrar que para cualesquiera puntos M y N del dominio G tiene lugar la desigualdad

$$|u(N)-u(M)| \leqslant A\,|\overrightarrow{MN}|.$$

86. Hallar la derivada de la función $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ en un punto arbitrario $M(x, y, z)$ en dirección del radio vector $\boldsymbol{r}$ de este punto.

87. Hallar la derivada de la función $u=\frac{1}{r}$, donde $r=|\boldsymbol{r}|$, en dirección del vector $\boldsymbol{l}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}+\cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$. ¿Para qué condición esta derivada es igual a cero?

88. Hallar la derivada de la función $u=\frac{1}{r}$, donde $r=|\boldsymbol{r}|$ en dirección de su gradiente.

89. Hallar la derivada de la función $u=yze^x$ en el punto M_0 (0, 0, 1) 1) por la dirección de su gradiente.

90. Hallar la derivada del campo escalar

$$u=u(x, y, z)$$

por la dirección del gradiente del campo escalar

$$v=v(x, y, z).$$

¿Para qué condición la derivada es igual a cero?

91. Hallar la dirección y la magnitud de la máxima variación de los siguientes campos escalares en los puntos dados M_0:

a) $u(M)=x^2y+y^2z+z^2x$; M_0 (1, 0, 0).
b) $u(M)=xyz$; M_0 (2, 1, -1).

CAPITULO III

CAMPO VECTORIAL

§ 10. LINEAS VECTORIALES. ECUACIONES DIFERENCIALES DE LAS LINEAS VECTORIALES

Definición 1. Si en cada punto M del espacio, o en una parte del mismo, está determinada la magnitud vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, se dice que es dado un *campo vectorial*.

Si en el espacio está introducido el sistema de coordenadas cartesianas, entonces la prefijación del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ es igual a la de las tres funciones escalares del punto $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, así que

$$\boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}.$$

Definición 2. *Línea vectorial* del *campo vectorial* $\boldsymbol{a}$ se llama la curva en cada punto M de la cual el vector $\boldsymbol{a}$ está dirigido tangente a esta curva.

Sea el campo vectorial determinado por el vector

$$\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k},$$

donde

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z), \quad R = R(x, y, z),$$

son funciones continuas de x, y, z que tienen derivadas limitadas *parciales de primer orden.*

Entonces, las ecuaciones diferenciales de las líneas vectoriales tienen la forma

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{1}$$

La integración del sistema de dos ecuaciones diferenciales (1) da un sistema de dos ecuaciones finitas

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2,$$

las cuales, consideradas en conjunto, determinan la familia paramétrica de las líneas vectoriales

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= C_1, \\ \varphi_2(x, y, z) &= C_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Si en algún dominio G para el sistema (1) están cumplidas las condiciones del teorema acerca de la existencia y la unicidad de la solución de una ecuación diferencial, entonces por cada punto

$M_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0) \in G$ pasa la única línea vectorial

$$\varphi_1\,(x,\ y,\ z) = \varphi_1\,(x_0,\ y_0,\ z_0),$$
$$\varphi_2\,(x,\ y,\ z) = \varphi_2\,(x_0,\ y_0,\ z_0).$$

Ejemplo 1. Hallar las líneas vectoriales del campo vectoria

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r}],$$

donde $\boldsymbol{c}$ es un vector constante.

Solución. Tenemos

$$\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

así que

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (c_2z - c_3y)\,\boldsymbol{i} + (c_3x - c_1z)\,\boldsymbol{j} + (c_1y - c_2x)\,\boldsymbol{k}.$$

Las ecuaciones diferenciales de las líneas vectoriales son

$$\frac{dx}{c_2z - c_3y} = \frac{dy}{c_3x - c_1z} = \frac{dz}{c_1y - c_2x}. \tag{3}$$

Multiplicamos el numerador y denominador de la primera fracción por x, de la segunda por y, de la tercera por z y las sumamos miembro a miembro. Utilizando la propiedad de las proporciones obtenemos

$$\frac{dx}{c_2z - c_3y} = \frac{dy}{c_3x - c_1z} = \frac{dz}{c_1y - c_2x} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}.$$

De aquí

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

y, en consecuencia

$$x^2 + y^2 + z^2 = A_1, \quad A_1 = \text{const} > 0.$$

Ahora multiplicamos el nominador y denominador de la primera fracción (3) por c_1, de la segunda por c_2, de la tercera por c_3 y después de sumar miembro a miembro obtenemos

$$\frac{dx}{c_2z - c_3y} = \frac{dy}{c_3x - c_1z} = \frac{dz}{c_1y - c_2x} = \frac{c_1\,dx + c_2\,dy + c_3\,dz}{0},$$

de donde

$$c_1dx + c_2dy + c_3dz = 0$$

y, por consiguiente,

$$c_1x + c_2y + c_3z = A_2, \quad A_2 = \text{const}.$$

Las ecuaciones que buscamos de las líneas vectoriales son

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= A_1, \\ c_1x + c_2y + c_3z &= A_2 \end{aligned}\right\}.$$

Estas ecuaciones muestran que las líneas vectoriales se obtienen como resultado de la intersección de esferas que tienen un centro

común en el origen de las coordenadas con los planos perpendiculares al vector $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$. De aquí se deduce que las líneas vectoriales son circunferencias cuyos centros se encuentran en la recta que pasa por el origen de las coordenadas en dirección del

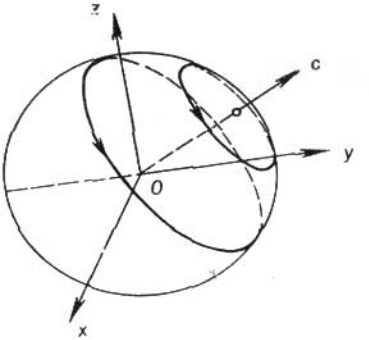


FIG. 14

vector $\boldsymbol{c}$. Los planos de las circunferencias son perpendiculares a la línea recta indicada (fig. 14).

Ejemplo 2. Hallar la línea vectorial del campo

$$\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k},$$

que pasa por el punto (1, 0, 0).

Solución. Las ecuaciones diferenciales de las líneas vectoriales son

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}.$$

De aquí hallamos

$$x^2 + y^2 = C_1, \qquad C_1 > 0,$$

o, si introducimos el parámetro t, obtendremos

$$x = \sqrt{C_1}\cos t, \quad y = \sqrt{C_1}\operatorname{sen} t.$$

En este caso la ecuación

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}$$

tiene la forma

$$\frac{\sqrt{C_1}\cos t\, dt}{\sqrt{C_1}\cos t} = \frac{dz}{b} \quad \text{o} \quad dz = b\, dt,$$

de donde hallamos

$$z = bt + C_2.$$

Y bien, las ecuaciones paramétricas de las líneas vectoriales serán

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{C_1}\cos t, \\ y &= \sqrt{C_1}\,\operatorname{sen} t, \\ z &= bt + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Si la línea vectorial se hace pasar a través del punto (1, 0, 0,) obtendremos

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{C_1}\cos t, \\ 0 &= \sqrt{C_1}\,\operatorname{sen} t, \\ 0 &= bt + C_2. \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones de este sistema se satisfacen para $t = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1$, y también cuando $C_1 = 1$.

Al tomar $k = 0$, obtenemos $t = 0$ y la última ecuación del sistema da $C_2 = 0$. Por tanto la línea vectorial buscada que pasa a través del punto (1, 0, 0), será

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \operatorname{sen} t, \\ z &= bt. \end{aligned}\right\}$$

Esto es la línea helicoidal.

Hallar las líneas vectoriales de los campos vectoriales siguientes:

92. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

93. $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, donde a_1, a_2, a_3, son constantes.

94. $\boldsymbol{a} = (z - y)\,\boldsymbol{i} + (x - z)\,\boldsymbol{j} + (y - x)\,\boldsymbol{k}$.

95. Hallar la línea vectorial del campo

$$\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

El campo vectorial se llama *plano* si todos los vectores $\boldsymbol{a}$ se encuentran en los planos paralelos y el campo es el mismo en cada uno de estos planos.

Si en alguno de estos planos introducimos el sistema de coordenadas cartesianas xOy, entonces los vectores del campo no tendrán componentes en el eje Oz y las coordenadas del vector no van a depender de z, es decir

$$\boldsymbol{a} = P(x, y)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y)\,\boldsymbol{j}.$$

Las ecuaciones diferenciales de las líneas vectoriales del campo plano tendrán la forma

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} = \frac{dz}{0}$$

o

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \\ z &= \text{const.} \end{aligned}\right\}$$

De aquí se ve que las líneas vectoriales del campo plano son las curvas planas que se encuentran en los planos paralelos al xOy.

Ejemplo 3. Hallar las líneas vectoriales del campo magnético de un conductor infinito de corriente eléctrica.

Solución. Supongamos que el conductor está dirigido por el eje Oz y en la misma dirección pasa la corriente I. El vector de la intensidad H del campo magnético que engendra la corriente es igual a

$$H = \frac{2}{\rho^2}[I, r], \tag{5}$$

donde $I = I \cdot k$ es el vector de la corriente, r es el radio vector del punto $M(x, y, z)$, ρ es la distancia desde el eje del conductor hasta el punto M. Abriendo los paréntesis del producto vectorial (5), *obtendremos*

$$H = -\frac{2Iy}{\rho^2} i + \frac{2Ix}{\rho^2} j.$$

Las ecuaciones diferenciales de las líneas vectoriales son:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0},$$

de *donde*

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2, \\ z &= C, \end{aligned}\right\}$$

es decir, las líneas vectoriales son las circunferencias con los centros en el eje Oz (fig. 15).

Hallar las líneas vectoriales de los siguientes campos *vectoriales planos:*

96. $a = xi + 2yj$.
97. $a = xi + zk$.
98. $a = xi - yj$.
99. $a = 2zj + 4yk$.
100. $a = x^2 i + y^2 j$.
101. $a = zj - yk$.

Las ecuaciones diferenciales de las líneas vectoriales

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

pueden ser escritas así:

$$\frac{dx}{dt}=P,\quad \frac{dy}{dt}=Q,\quad \frac{dz}{dt}=R$$

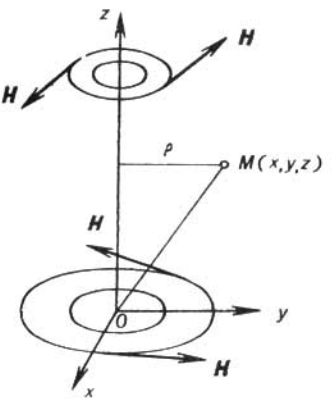


FIG. 15

o en la forma vectorial:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{a}\,(M). \tag{6}$$

Esta forma de las ecuaciones de las líneas vectoriales resulta muy cómoda para la solución de una serie de problemas.

Ejemplo 4. Hallar las líneas vectoriales del campo $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{r}]$, donde $\boldsymbol{c}$ es un vector constante.

Solución. Utilizando la proporción (6) obtendremos

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{r}]. \tag{7}$$

Multiplicando ambos miembros (7) escalarmente por $\boldsymbol{c}$ y utilizando las propiedades del producto mixto hallamos

$$\left(\boldsymbol{c},\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r})=0. \tag{8}$$

Análogamente, multiplicando ambos miembros (7) escalarmente por $\boldsymbol{r}$, obtendremos

$$\left(\boldsymbol{r},\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})=0 \tag{9}$$

De la ecuación (8) se deduce que

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}) = \text{const},$$

y de la ecuación (9) sigue que

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = const.$$

Las líneas vectoriales son líneas de intersección de los planos $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}) = \text{const}$ con las esferas $r^2 = \text{const}$.

Hallar las líneas vectoriales de los campos vectoriales siguientes:

102. $\boldsymbol{a} = f(r)\cdot\boldsymbol{r}$.

103. $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{b}_0$, donde $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ son los vectores constantes.

§ 11. FLUJO DEL CAMPO VECTORIAL. METODOS DEL CALCULO DEL FLUJO

1. **Flujo del campo vectorial.** Sea que tenemos el campo vectorial

$$\boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

donde las coordenadas $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ del vector $\boldsymbol{a}(M)$ son continuas (el campo $\boldsymbol{a}(M)$ es continuo) en algún dominio G. Sea S alguna superficie bilateral plana o parcialmente plana en la cual está escogido un lado determinado (la superficie orientada).

Definición. *Flujo* Π *del campo vectorial* $\boldsymbol{a}(M)$ *a través de* la superficie orientada S se llama la integral superficial del primer género por la superficie S de la proyección del vector $\boldsymbol{a}(M)$ a la normal $\boldsymbol{n}(M)$ hacia esta superficie:

$$\Pi = \int\limits_S \int \operatorname{pr}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}\, dS = \int\limits_S \int (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS,$$

donde $\boldsymbol{n}^0$ es el vector de unidad (versor) de la normal $\boldsymbol{n}$ hacia el lado escogido de la superficie S; dS es el elemento de área de la superficie S.

En el caso de una superficie cerrada vamos a eligir siempre la normal exterior $\boldsymbol{n}$, dirigida fuera del dominio limitado con la superficie S.

Si α, β, γ son los ángulos que forman con los ejes de coordenadas Ox, Oy, Oz la normal $\boldsymbol{n}$ a la superficie S, entonces se puede expresar el flujo a través de la integral superficial del segundo género

$$\Pi = \int\limits_S \int (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS = \int\limits_S \int [P(x, y, z)\cos\alpha +$$

$$+ Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma]\, dS$$

o

$$\Pi = \iint_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS = \iint_S P(x, y, z)\, dy\, dz + \tag{58}$$

$$+ Q(x, y, z)\, dx\, dz + R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

donde

$$\cos\alpha\, dS = dy\, dz, \quad \cos\beta\, dS = dx\, dz \quad \cos\gamma\, dS = dx\, dy.$$

PROPIEDADES PRINCIPALES DEL FLUJO DEL CAMPO VECTORIAL

a) El flujo cambia el signo al inverso al modificar la orientación de la superficie (es decir, con la variación de la orientación de la normal $\boldsymbol{n}$ a la superficie S):

$$\iint_{S^+} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS = -\iint_{S^-} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS,$$

donde S^+ es el lado de la superficie S, en la cual se elige la normal $\boldsymbol{n}$, y S^- es el lado de la superficie S, en la cual se toma la normal $-\boldsymbol{n}$ (véase [6]).

b) Propiedad de linealidad:

$$\iint_S (\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}^0)\, dS = \lambda \iint_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS + \mu \iint_S (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}^0)\, dS,$$

donde λ y μ son los números constantes.

c) Propiedad de aditividad: si la superficie S se compone de algunas partes planas $S_1, S_2, \ldots, S_m$, entonces el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}(M)$ a través de S es igual a la suma de los flujos del vector $\boldsymbol{a}(M)$ a través de las superficies $S_1, S_2, \ldots, S_m$:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{m} \iint_{S_k} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS.$$

Esta propiedad permite extender el concepto del flujo a las superficies parcialmente planas.

Ejemplo 1. Hallar el flujo del vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$ a través de un área perpendicular al eje Ox y que tiene la forma del rectángulo cuyos lados son iguales a 1 y 2 (fig. 16), en la dirección positiva del eje Ox.

Solución. Según la definición del flujo del vector a través de la superficie S tendremos

$$\Pi = \iint_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS.$$

En nuestro caso $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{i}$, entonces $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = 1$. Teniendo en cuenta que el área del rectángulo es igual a 2, obtenemos

$$\Pi = \int\int_S 1 \, dS = 2.$$

Observación. Eligiendo el vector unitario (versor) de la normal al área S de tal *modo que* $\boldsymbol{n}^0 = -\boldsymbol{i}$, *obtendríamos* $\Pi = -2$.

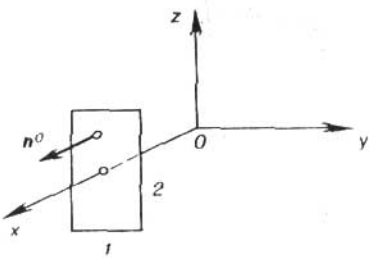


FIG. 16

Ejemplo 2. *Calcular el flujo del campo vectorial* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{r}$ es el radio vector a través del recto cilindro circular de la altura h, el radio de base R y el eje Oz.

Solución. Superficie S se compone de la superficie lateral σ_1, de la base superior σ_2 y de la base inferior σ_3 del cilindro.

El flujo buscado Π en virtud de la propiedad de aditividad será igual a $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, donde Π_1, Π_2, Π_3 son los flujos del campo dado a través de σ_1, σ_2, σ_3, respectivamente.

La normal exterior $\boldsymbol{n}^0$ *en la superficie lateral* σ_1 *del cilindro* es paralela al plano xOy, por eso

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}^0) = pr_{\boldsymbol{n}^0}\boldsymbol{r} = R$$

(véase la fig. 17). Por consiguiente,

$$\Pi_1 = \int\int_{\sigma_1} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) \, dS = R \int\int_{\sigma_1} dS = R \cdot 2\pi Rh = 2\pi R^2 h.$$

En la base superior σ_2 la normal $\boldsymbol{n}^0$ es paralela al eje Oz, por *eso se puede considerar* $\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{k}$ (*fig.* 17). *Entonces*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) = pr_{Oz}\boldsymbol{r} = h,$$

y lo que significa

$$\Pi_2 = \int\int_{\sigma_2} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) \, dS = h \int\int_{\sigma_2} dS = h \cdot \pi R^2 = \pi R^2 h.$$

En la base inferior σ_3 el vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ es perpendicular a la normal $\boldsymbol{n}^0 = -\boldsymbol{k}$. Por eso $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = (\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{k}) = 0$ y

$$\Pi_3 = \iint_{\sigma_3} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS = 0.$$

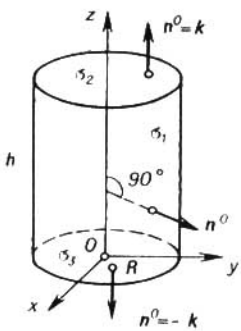


FIG. 17

El flujo buscado será igual a

$$\Pi = \iint_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS = 3\pi R^2 h.$$

Ejemplo 3. Hallar el flujo del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

a través de la esfera del radio R con el centro en el origen de coordenadas.

Solución. Ya que la normal $\boldsymbol{n}$ a la esfera es colineal al radio vector $\boldsymbol{r}$, entonces se puede tomar $\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$. Por eso

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = \left(\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}, \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^4}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = \frac{|\boldsymbol{r}|^2}{|\boldsymbol{r}|^4} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2}.$$

Pero en la esfera S tenemos $|\boldsymbol{r}| = R$, por eso $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = \frac{1}{R^2}$.

El flujo buscado Π será igual a

$$\Pi = \iint_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, dS = \frac{1}{R^2} \iint_S dS = 4\pi,$$

puesto que la superficie de toda esfera S es igual a $\oiint_S dS = 4\pi R^2$.

104. Calcular el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{j}$ a través del área que tiene la forma del triángulo con los vértices en los puntos M_1 (1, 2, 0), M_2 (0, 2, 0), M_3 (0, 2, 2), en dirección donde se encuentra el origen de coordenadas.

105. Hallar el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k},$$

donde α, β, γ son constantes a través del área perpendicular al eje Oz y que tiene la forma del círculo del radio R en dirección positiva del eje Oz.

106. Hallar el flujo del vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ a través de la superficie exterior del cono circular, el vértice del cual está en el origen de coordenadas, el radio de la base es igual a R y la altura h (el eje del cono va por el eje Oz).

107. Hallar el flujo del vector $\boldsymbol{a} = f(|\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{r}$ a través de la esfera del radio R con el centro en el origen de coordenadas.

II. Métodos del cálculo del flujo del vector.

1°. Método de proyección a uno de los planos de coordenadas. Sea que la superficie abierta S se proyecta recíproca y unívocamente al plano xOy en el dominio D_{xy}. En este caso, la superficie S puede prefijarse por la ecuación $z = f(x, y)$, y puesto que el segmento del área dS de esta superficie es igual a

$$dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},$$

entonces, el cálculo del flujo Π a través del lado elegido de la superficie S se reduce al cálculo de la integral doble según la fórmula

$$\Pi = \int\int_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\,dS = \int\int_{D_{xy}} \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)}{|\cos\gamma|}\Big|_{z=f(x,y)} dx\,dy. \qquad (1)$$

Aquí versor $\boldsymbol{n}^0$ de la normal al lado elegido de la superficie S se halla mediante la fórmula

$$\boldsymbol{n}^0 = \pm\frac{\operatorname{grad}[z - f(x, y)]}{|\operatorname{grad}[z - f(x, y)]|} = \pm\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \qquad (2)$$

y cos γ es igual al coeficiente para el versor k en la fórmula (2):

$$\cos\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}. \tag{3}$$

Si el ángulo entre el eje Oz y la normal n^0 es agudo, entonces en la fórmulas (2) y (3) se toma el signo «+», si el ángulo γ es obtuso, entonces se toma el signo «—». El símbolo

$$\left.\frac{(a,\ n^0)}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,\ y)}$$

significa que en la función subintegral z se sustituye por $f(x, y)$.

Si resulta cómodo proyectar la superficie S a los planos de coordenadas yOz o xOz, entonces para calcular el flujo II se usan respectivamente las fórmulas:

$$\Pi = \iint\limits_{D_{yz}} \left.\frac{(a,\ n^0)}{|\cos\alpha|}\right|_{x=\varphi(y,\ z)} dy\,dz \tag{4}$$

o

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xz}} \left.\frac{(a,\ n^0)}{|\cos\beta|}\right|_{y=\psi(x,\ z)} dx\,dz. \tag{5}$$

La fórmula (4) se usa en el caso, cuando la superficie S se proyecta recíproca y unívocamente en el dominio D_{yz} del plano yOz, y, por consiguiente, puede prefijarse por la ecuación $x = \varphi(y, z)$; cos α es como coeficiente para el versor i en la fórmula

$$n^0 = \pm \frac{\operatorname{grad}[x - \varphi(y,\ z)]}{|\operatorname{grad}[x - \varphi(y,\ z)]|} = \pm \frac{i - \frac{\partial\varphi}{\partial y} j - \frac{\partial\varphi}{yz} k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}},$$

es decir,

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}.$$

El singo «+» se toma en el caso, si el ángulo α entre el eje Ox y la normal n^0 es agudo, si α es el ángulo obtuso, entonces se emplea, el signo «—».

La fórmula (5) se usa con la unívoca proyección recíprocamente de la superficie S al plano xOz; en este caso S puede ser

prefijada por la ecuación $y = \psi(x, z)$ y entonces

$$n^0 = \pm \frac{\operatorname{grad}[y - \varphi(x, z)]}{|\operatorname{grad}[y - \psi(x, z)]|} = \pm \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial x} i + j - \frac{\partial \psi}{\partial z} k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}$$

cos β es el coeficiente para el versor j en la última fórmula, es decir,

$$\cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}.$$

Si el ángulo β entre el eje Oy y la normal n^0 es agudo, entonces se toma el signo «+», si el ángulo β es obtuso, se toma el signo «—».

Observación. En el caso, cuando la superficie S está prefijada implícitamente por la ecuación $\Phi(x, y, z) = 0$, el vector unitario de la normal

$$n^0 = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma$$

se halla según la fórmula

$$n^0 = \pm \frac{\operatorname{grad} \Phi(x, y, z)}{|\operatorname{grad} \Phi(x, y, z)|} = \pm \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} i + \frac{\partial \Phi}{\partial y} j + \frac{\partial \Phi}{\partial z} k}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

donde el signo en el segundo miembro se determina por la elección de la normal a la superficie S.

Para calcular el flujo Π del campo vectorial a a través de la superficie S es necesario proyectarla recíproca y unívocamente al alguno de los planos de coordenadas xOy, xOz, yOz, lo que se puede realizar, si la ecuación $\Phi(x, y, z) = 0$ es unívocamente resoluble, respectivamente, con respecto a z ($z = f(x, y)$), y ($y = \psi(x, z)$) o x ($x = \varphi(y, z)$), después de esto se puede usar una de las fórmulas (1), (4), (5).

Ejemplo 4. Hallar el flujo del campo vectorial

$$a = (x - 2z) i + (x + 3y + z) j + (5x + y) k$$

a través del lado superior del triángulo ABC con los vértices en los puntos A (1, 0, 0), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1).

Solución. La ecuación del plano, en el cual está el triángulo ABC, tiene la forma $x + y + z = 1$, de donde $z = 1 - x - y$. El triángulo ABC se proyecta recíproca y unívocamente al plano xOy en el dominio D_{xy}, es decir, al triángulo OAB (fig. 18).

Según la condición la normal n^0 al plano, en el cual está el triángulo ABC, forma el ángulo agudo γ con el eje Oz, por eso en la fórmula (2) tomamos el signo «+» y obtenemos

$$n^0 = \frac{\operatorname{grad}(x + y + z - 1)}{|\operatorname{grad}(x + y + z - 1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} k. \qquad (6)$$

Hallamos el producto escalar

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0)=(x-2z)\frac{1}{\sqrt{3}}+(x+3y+z)\frac{1}{\sqrt{3}}+$$
$$+(5x+y)\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{7x+4y-z}{\sqrt{3}},$$

De la fórmula (6) obtenemos $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}>0$ y, por consiguiente,

$$dS=\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}=\sqrt{3}\,dx\,dy.$$

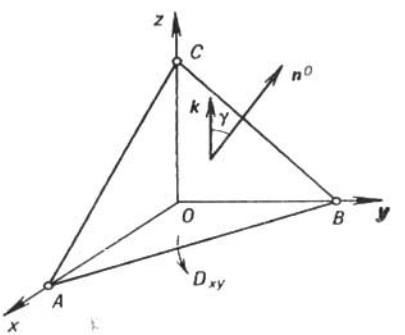


FIG. 18

Utilizando la fórmula (1), calculamos el flujo buscado:

$$\Pi=\iint\limits_S(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0)\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}(7x+4y-z)\Big|_{z=1-x-y}dx\,dy=$$
$$=\iint\limits_{D_{xy}}(8x+5y-1)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(8x+5y-1)\,dy=\frac{5}{3}.$$

Ejemplo 5. Hallar el flujo del vector $\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ a través del segmento de la superficie $z=x^2+y^2$, cortado por el plano $z=2$. Se toma la normal exterior respecto al espacio limitado por el paraboloide.

Solución. La superficie dada (el paraboloide de rotación) se proyecta recíproca y unívocamente al plano xOy en el círculo

D_{xy} (fig. 19). Hallamos el versor de la normal n^0 a la superficie S:

$$n^0 = \pm \frac{\operatorname{grad}(z - x^2 - y^2)}{|\operatorname{grad}(z - x^2 - x^2)|} = \pm \frac{-2xi - 2yj + k}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Según la condición del problema la normal n^0 forma el ángulo obtuso γ con el eje Oz, por eso delante de la fracción es necesario

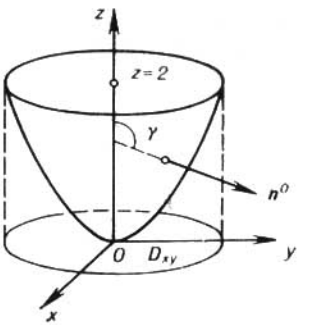


FIG. 19

tomar el signo «—». De tal modo,

$$n^0 = \frac{2xi + 2yj - k}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}},$$

de aquí

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} < 0$$

y, por consiguiente,

$$dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dx\,dy.$$

Hallamos el producto escalar

$$(a,\ n^0) = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

El flujo buscado según la fórmula (1) es igual a

$$\Pi = \iint_S (a,\ n^0)\,dS = \iint_{D_{xy}} (2y^3 - z)\Big|_{z=x^2+y^2} dx\,dy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} (2y^3 - y^2 - x^2)\,dx\,dy.$$

El dominio de integración D_{xy} es el círculo con el centro en el origen de coordenadas del radio $R = \sqrt{2}$. Introduciendo las coordenadas polares $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$, obtendremos

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} (2\rho^3 \operatorname{sen}^3 \varphi - \rho^2)\, \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (2\rho^4 \operatorname{sen}^3 \varphi - \rho^3)\, d\rho = -2\pi \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi.$$

Ejemplo 6. Hallar el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = i - j + xyzk$ a través del círculo S, recibido por la sección de la esfera

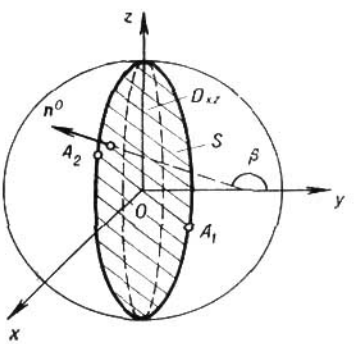


FIG. 20

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ con el plano $y = x$. Tomar el lado de la esfera dirigido a la parte positiva del eje Ox.

Solución. Debido a lo que el plano $y = x$ es perpendicular al plano de coordenadas xOy, entonces el círculo S, que está en este plano, se proyecta al plano xOy en el segmento $A_1 A_2$ y, por consiguiente, se altera la univocidad recíproca de proyección. En otros planos de coordenadas el círculo S se proyecta recíproca y unívocamente. Proyectando el círculo, por ejemplo, del plano xOz, obtendremos el dominio D_{xz} limitado por elipse (fig. 20). Hallemos la ecuación de la elipse excluyendo y del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ y &= x, \end{aligned}\right\}$$

De aquí

$$2x^2 + z^2 = R^2 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{\frac{R^2}{2}} + \frac{z^2}{R^2} = 1.$$

Según la condición la normal al círculo S forma el ángulo obtuso β con el eje Oy (fig. 20), por eso tomamos

$$n = -\operatorname{grad}(y - x) = i - j,$$

$$n^0 = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{2}} i - \frac{1}{\sqrt{2}} j.$$

De la última igualdad tenemos $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$. El segmento del área dS del círculo es igual a

$$dS = \frac{dx\,dz}{|\cos\beta|} = \sqrt{2}\,dx\,dz.$$

Hallamos el producto escalar: $(a, n^0) = \sqrt{2}$.

El flujo buscado según la fórmula (5) es igual a

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xz}} 2\,dx\,dz = 2 \iint\limits_{D_{xz}} dx\,dz = 2 \cdot \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,R^2\pi,$$

puesto que el área Q del dominio D_{xz} limitado por elipse con semiejes $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$, y $b = R$, es igual a

$$Q = \iint\limits_{D_{xz}} dx\,dz = \pi ab = \frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}.$$

Ejemplo 7. Calcular el flujo del vector $a = xi + yj + zk$ a través del lado exterior de la superficie lateral del cilindro circular $x^2 + y^2 = R^2$ *limitada por los planos* $z = 0$ y $z = H$ $(H > 0)$.

Solución. El cilindro dado se proyecta sobre el plano xOy en forma de línea, precisamente en la circunferencia (fig. 21)

$$x^2 + y^2 = R^2,$$
$$z = 0.$$

Por eso vamos a proyectar el cilindro sobre otros planos de coordenadas, por ejemplo sobre el plano yOz. Puesto que el cilindro se proyecta sobre el plano yOz no recíproca y unívocamente, entonces *utilicemos la propiedad de aditividad del flujo del vector* y representemos el flujo buscado Π en forma de la suma de los flujos $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$, donde Π_1 es el flujo del campo a través del *segmento S_1 del cilindro, ubicado en el dominio, donde* $y \geqslant 0$, y Π_2 es el flujo del mismo campo a través del segmento S_2 del cilindro, ubicado en el dominio, donde $y < 0$. En S_1 tenemos

$$n^0 = \frac{xi + yj}{R}, \qquad (a, n^0) = \frac{x^2 + y^2}{R} = R.$$

Por consiguiente,

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} R\, dS = R \iint\limits_{S_1} dS = RS,$$

donde S es el área del segmento S_1 del cilindro. Puesto que $S = \pi RH$, entonces $\Pi_1 = \pi R^2 H$.

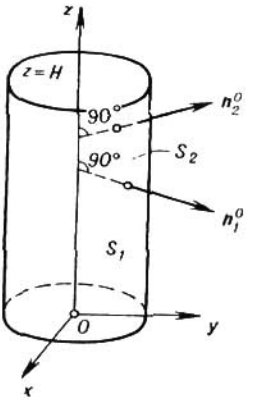


FIG. 21

En S_2 otra vez tenemos

$$n^0 = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}}{R}, \quad \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = \frac{x^2 + y^2}{R} = R$$

y, por consiguiente,

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} R\, dS = RS = \pi R^2 H.$$

El flujo buscado es igual a $\Pi = 2\pi R^2 H$.

Observación. Se puede resolver el problema con menos dificultad, si en el cilindro introducimos las coordenadas curvilíneales $x = R\cos\varphi$, $y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z = z$. (véase el punto 3°).

Para hallar el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ a través de la superficie S prefijada por la ecuación $z = f(x, y)$ utilizando el método de proyección sobre el plano de coordenadas, no es necesario hallar el versor $\boldsymbol{n}^0$ de la normal y se puede tomar el vector

$$\boldsymbol{n} = \pm \operatorname{grad}[z - f(x, y)] = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right).$$

Entonces la fórmula (1) para el cálculo del flujo Π obtiene la forma

$$\Pi = \int\int_S (a,\ n^0)\, dS = \int\int_{D_{xy}} (a,\ n)\Big|_{z=f(x,\ y)}\, dx\, dy. \qquad (7)$$

Por analogía se obtienen las fórmulas para el cálculo de los flujos a través de las superficies prefijadas por las ecuaciones $x = \varphi(y, z)$ o $y = \psi(x, z)$.

La fórmula (7) en la forma de coordenadas se escribe como sigue:

$$\Pi = \pm \int\int_{D_{xy}} \left\{ -P[x,\ y,\ f(x,\ y)] \frac{\partial f}{\partial x} - Q[x,\ y,\ f(x,\ y)] \frac{\partial f}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + R[x,\ y,\ f[x,\ y)] \right\} dx\, dy$$

Ejemplo 8. Calcular el flujo del campo vectorial

$$a = xi + yj + \sqrt{x^2+y^2-1}\, k$$

a través del lado exterior del hiperboloide de una cavidad $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$ limitado con los planos $z = 0$, $z = \sqrt{3}$.

Solución. La superficie dada se proyecta recíproca y unívocamente sobre el plano xOy en el dominio D_{xy} limitado por las circunferencias

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ y } \left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4, \\ z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Hallamos la normal exterior n:

$$n = \pm \operatorname{grad}\left(z - \sqrt{x^2+y^2-1}\right) = \pm \left(\frac{-xi-yi}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + k \right).$$

Puesto que n forma con el eje Oz el ángulo obtuso γ (fig. 22), entonces tomamos el signo «—» y, por lo tanto

$$n = \frac{xi+yj}{\sqrt{x^2+y^2-1}} - k.$$

Hallamos el producto escalar

$$(a,\ n) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2-1}} - \sqrt{x^2+y^2-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

Empleando la fórmula (7), obtendremos

$$\Pi = \int\int_S (a,\ n^0)\, dS = \int\int_{D_{xy}} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

Pasando a las coordenadas polares $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$, obtenemos

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\rho \, d\rho \, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 1}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 1}} = 2\pi \sqrt{\rho^2 - 1} \Big|_1^2 = 2\sqrt{3}\pi.$$

Ejemplo 9. Calcular el flujo del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie cerrada limitada mediante el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y por planos $z = x$, $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

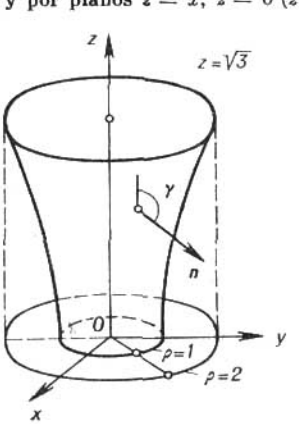


FIG. 22

Solución. La superficie S es parcialmente plana, por eso utilizando la propiedad de aditividad del flujo y representando el flujo buscado Π en forma de la suma de los flujos Π_1, Π_2, Π_3 a través de las partes planas, respectivamente, S_1 (semicírculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant x \leqslant R$, $z = 0$), S_2 (una parte del plano $z = x$) y S_3 (una parte del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$): $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$; ya que S es cerrada, entonces tomamos la normal exterior a ella (fig. 23).

1) En S_1, donde $z = 0$, tenemos $\boldsymbol{n}^0 = -\boldsymbol{k}$, por tanto

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = -x$$

y, por consiguiente, el flujo Π_1 será igual a

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{S_1} x \, dS = -\iint\limits_{S_1} x \, dx \, dy.$$

Pasando a las coordenadas polares $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$, hallamos

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{S_1} \rho \cos \varphi \rho \, d\rho \, d\varphi = -\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 \, d\rho = -\frac{2}{3} R^3.$$

2) En S_2, donde $z = x$, tenemos

$$n = \pm \operatorname{grad} (z - x) = \pm (-i, +k),$$

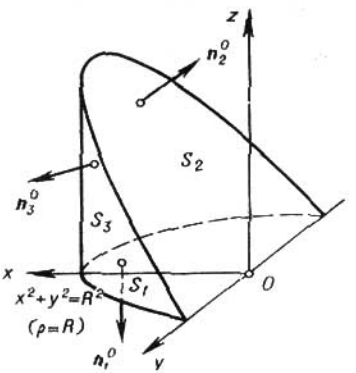


FIG. 23

y puesto que la normal n a S_2 forma con el eje Oz el ángulo agudo, entonces en el segundo miembro tomamos el signo «+». De tal modo, $n = -i + k$ y resulta que $(a, n) = x - y$.

Proyectando S_2 sobre el plano xOy obtenemos semicírculo

$$D_{xy}: \ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Entonces según la fórmula (6) obtendremos

$$\Pi_2 = \iint\limits_{D_{xy}} (a, n)\Big|_{z=x} dx \, dy,$$

y de nuevo pasando a las coordenadas polares, obtendremos

$$\Pi_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) \, d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 \, d\rho = \frac{2}{3} R^3.$$

3) En S_3, donde $x^2 + y^2 = R^2$, es decir, en la superficie lateral del cilindro, tenemos

$$n^0 = \pm \frac{\operatorname{grad} (x^2 + y^2 - R^2)}{|\operatorname{grad} (x^2 + y^2 - R^2)|} = \pm \frac{xi + yj}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm \frac{xi + yj}{R}.$$

En este caso la normal n forma con el eje Oz el ángulo recto y, por eso $\cos\gamma = 0$, debido a lo que la elección del signo en el segundo miembro es arbitrario; tomemos, por ejemplo, el signo «+» entonces

$$n^0 = \frac{xi + yj}{R}, \qquad (a,\ n^0) = \frac{(x+z)\ y}{R}$$

y, por consiguiente,

$$\Pi_3 = \frac{1}{R} \iint\limits_{S_2} (x+z)\ y\ dS.$$

No se puede proyectar la superficie S_2 (cilindro recto) sobre el plano xOy, porque ella se proyectará en línea, en semicircunferencia (se altera la univocidad recíproca de la proyección). Lo mismo sucede y en el caso de proyección sobre el plano xOz. Por eso vamos a proyectar la superficie S_3 sobre el plano yOz, en el que ella se proyecta recíproca y unívocamente en el dominio D_{yz} limitado por la línea

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2, \\ z &= x. \end{aligned}\right\}$$

Excluyendo de aquí x, obtendremos la ecuación de la proyección de esta línea sobre el plano zOy: $z^2 + y^2 = R^2$ es la circunferencia. Puesto que

$$|\cos\alpha| = |\cos\widehat{(n_3^0,\ i)}| = |(n_3^0,\ i)| = \left|\frac{x}{R}\right| = \frac{x}{R} \qquad (x \geqslant 0),$$

entonces obtendremos

$$\Pi_3 = \frac{1}{R} \iint\limits_{D_{yz}} \frac{(x+z)\ y}{|\cos\alpha|}\Big|_{x=z} dy\ dz = \iint\limits_{D_{yz}} \frac{(x+z)\ y}{x}\Big|_{x=z} dy\ dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} \frac{2zy}{z}\ dy\ dz = 2 \iint\limits_{D_{yz}} y\ dy\ dz.$$

Utilizando las coordenadas polares: $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\operatorname{sen}\varphi$, hallamos

$$\Pi_3 = 2 \iint\limits_{D_{yz}} \rho\cos\varphi\rho\ d\rho\ d\varphi = 2 \int\limits_0^{\pi} \cos\varphi\ d\varphi \int\limits_0^R \rho^2\ d\rho = 0.$$

Pues,

$$\Pi = \frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{2}{3}\pi R^3 + 0 = 0.$$

108. Calcular el flujo del campo vectorial $a = yi + zj + xk$ a través del lado superior del triángulo limitado por los planos

$$x + y + z = a, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

109. Calcular el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i}$ a través de la superficie exterior del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ limitado por el plano $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

110. Calcular el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$ a través de la superficie lateral del cilindro circular $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ limitada por los planos $z = 0$, $z = h$ $(h > 0)$.

111. *Calcular el flujo del campo vectorial* $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de la parte superior del círculo que corta el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el plano $z = h$ $(h > 0)$.

112. Calcular el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ a través de la superficie exterior del paraboloide $x^2 + y^2 = 9 - z$, que se encuentra en el primer octante.

113. Calcular el flujo del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{i} + (y^2 + z^2)\,\boldsymbol{j} + (z^2 + x^2)\,\boldsymbol{k}$$

a través de un segmento del plano $z = 0$ limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en dirección del versor $\boldsymbol{k}$.

114. Calcular el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$ a través de la superficie total del cono $x^2 + y^2 = z^2$ limitada por el plano $z = 1$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

115. Calcular el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + (1 - 2y)\,\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ a través de la superficie cerrada limitada por el paraboloide $x^2 + z^2 = 1 - 2y$ $(y \geqslant 0)$ y *por el plano* $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

116. Calcular el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de la superficie total de la pirámide limitada por los planos $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

117. Calcular el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

2°. Método de proyección sobre todos los tres planos de coordenadas. Sea que la superficie S se proyecta recíproca y unívocamente sobre todos los tres planos de coordenadas. Denominemos por medio de D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} las proyecciones S sobre los planos xOy, xOz, yOz respectivamente.

En este caso la ecuación $F(x, y, z) = 0$ de la superficie S es unívocamente calculable respecto a cada de los argumentos x, y, z, por lo tanto

$$x = x(y, z),\ y = y(x, z),\ z = z(x, y).$$

Entonces el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie S, el vector de unidad de la normal es igual a

$$\boldsymbol{n}^0 = \cos\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \cos\beta\cdot\boldsymbol{j} + \cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$$

se puede escribir como sigue:

$$\Pi = \iint\limits_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\,dS = \iint\limits_S [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma]\,dS. \quad (8)$$

Es conocido que

$$\begin{aligned} dS\cos\alpha &= \pm dy\,dz, \\ dS\cos\beta &= \pm dx\,dz, \\ dS\cos\gamma &= \pm dx\,dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Con todo eso el signo en cada de las fórmulas (9) se toma tal, cual es el signo de cos α, cos β y cos γ en la superficie S. Sustituyendo (9) en (8), obtendremos

$$\Pi = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z]\,dy\,dz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q[x, y(x, z), z]\,dx\,dz \pm \pm \iint\limits_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]\,dx\,dy. \quad (10)$$

Ejemplo 10. Hallar el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$$

a través del segmento de la superficie exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encuentra en el primer octante.

Solución. Tenemos

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2-1)}{|\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2-1)|} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

de donde, teniendo en cuenta que la superficie dada S se encuentra en el primer octante, obtendremos

$$\cos\alpha = x \geqslant 0,\ \cos\beta = y \geqslant 0,\ \cos\gamma = z \geqslant 0.$$

Por eso en fórmula (10) tomamos delante de todas las integrales el signo «+» y, haciendo en la fórmula

$$P = xy,\ Q = yz,\ R = xz,$$

obtenemos

$$\Pi = \iint\limits_{D_{yz}} xy\,dy\,dz + \iint\limits_{D_{xz}} yz\,dx\,dz + \iint\limits_{D_{xy}} xz\,dx\,dy. \quad (11)$$

De la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hallamos

$$z = z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad y = y(x, z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2},$$

$$x = x(y, z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2},$$

Sustituyendo estas expresiones para x, y, z respectivamente en la tercera, segunda y primera integrales del segundo miembro (11), obtenemos

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy + \iint\limits_{D_{xz}} z\sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz + \iint\limits_{D_{yz}} y\sqrt{1-y^2-z^2}\,dy\,dz. \quad (12)$$

Calculemos la primera integral que está en el segundo miembro, pasando a las coordenadas polares $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\operatorname{sen}\varphi$, donde $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Entonces obtenemos

$$I_1 = \iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{xy}} \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cos\varphi\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \int\limits_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho.$$

Suponiendo que en la última integral $\rho = \operatorname{sen} t$, $d\rho = \cos t\,dt$, tendremos

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2t\,dt = \frac{\pi}{16}.$$

La segunda y tercera integrales en la fórmula (12) se calculan análogamente; con esto obtenemos

$$I_2 = \iint\limits_{D_{xz}} z\sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz = \frac{\pi}{16},$$

$$I_3 = \iint\limits_{D_{yz}} y\sqrt{1-y^2-z^2}\,dy\,dz = \frac{\pi}{16}.$$

El flujo buscado será igual a

$$\Pi = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3\pi}{16}.$$

118. Aplicando el método de proyección sobre todos los tres planos de coordenadas. Calcular el flujo del campo vectorial a través de la superficie S:

a) $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,

S es el lado superior de la parte limitada del plano $3x + 6y - 2z = 6$, cortada por los planos de coordenadas.

b) $\boldsymbol{a} = (x + y + z)\,\boldsymbol{i} + (x + y + z - 1)\,\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$,

S, el lado superior de la parte del plano

$$x + y + z = 1$$

que se encuentra en el primer octante,

c) $\boldsymbol{a} = (x - \sqrt{y - z^2})\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + (\sqrt{y - x^2} - z)\,\boldsymbol{k}$,

S, el lado exterior del paraboloide de rotación

$$y = x^2 + z^2,$$

limitado por el plano $y = 4$ y que se encuentra en el primer octante.

3°. Método de introducción de coordenadas curvilíneas en las superficies. En algunos casos para calcular el flujo del campo vecto-

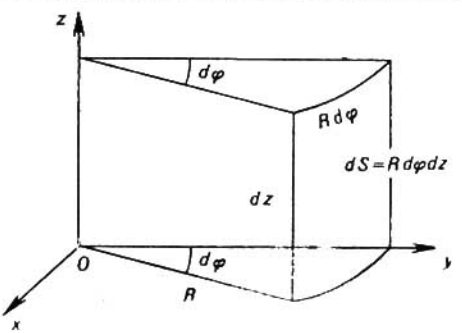


FIG. 24

rial a través de la superficie dada S se puede elegir en la misma superficie un sistema simple de coordenadas, en el cual es cómodo calcular el flujo sin utilizar la proyección sobre los planos de coordenadas.

Examinemos unos casos particulares.

Caso 1). Sea la superficie S un segmento del cilindro circular $x^2 + y^2 = R^2$ limitado por las superficies $z = f_1(x, y)$ y $z = f_2(x, y)$, al mismo tiempo $f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y)$. Suponiendo

$$x = R \cos \varphi,\ y = R \operatorname{sen} \varphi,\ z = z,$$

obtenemos para la superficie dada $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $f_1(R \cos \varphi,\ R \operatorname{sen} \varphi) \leqslant z \leqslant f_2(R \cos \varphi,\ R \operatorname{sen} \varphi)$, y para el segmento del área dS obtenemos la expresión siguiente (fig. 24)

$$dS = R\, d\varphi\, dz.$$

Entonces el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}$ por el lado exterior de la superficie S se calcula según la fórmula

$$\Pi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R\cos\varphi,\ R\operatorname{sen}\varphi)}^{f_2(R\cos\varphi,\ R\operatorname{sen}\varphi)} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0)\, dz, \tag{13}$$

donde

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\operatorname{grad}(x^2+y^2-R^2)}{|\operatorname{grad}(x^2+y^2-R^2)|} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{R}.$$

Ejemplo 11. Hallar el flujo del vector $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través del lado exterior de la superficie lateral del cilindro circular $x^2 + y^2 = R^2$ limitado por los planos $z = 0$ y $z = H$ $(H > 0)$.

Solución. En este caso tenemos:
$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $f_1(R\cos\varphi,\ R\operatorname{sen}\varphi) = 0$, $f_2(R\cos\varphi,\ R\operatorname{sen}\varphi) = H$
Introducimos en el cilindro las coordenadas curvilíneas

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\operatorname{sen}\varphi,\ z = z.$$

Entonces el flujo buscado del vector $\boldsymbol{r}$ será igual a

$$\Pi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}^0)\, dz.$$

Pero ya que

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = R\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i} + R\operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

y la normal $\boldsymbol{n}^0$ en el cilindro:

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{R} = \frac{R\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+R\operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{j}}{R} = \cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{j},$$

entonces el producto escalar en el cilindro será igual a

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}^0) = R\cos^2\varphi + R\operatorname{sen}^2\varphi = R.$$

Definitivamente hallamos

$$\Pi = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz = 2\pi R^2 H.$$

Ejemplo 12. Calcular el flujo del radio vector

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie lateral del cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ limitado de abajo por el plano $x + y + z = 1$, y de arriba por el plano $x + y + z = 2$.

Solución. En el caso dado (fig. 25) tenemos

$$R = 1,\ f_1(x,\ y) = 1 - x - y,\quad f_2(x,\ y) = 2 - x - y.$$

Pasando a las coordenadas en el cilindro

$$x = \cos\varphi,\ y = \operatorname{sen}\varphi,\ z = z,$$

obtendremos

$$f_1(x,\ y) = 1 - \cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi,\quad f_2(x,\ y) = 2 - \cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi.$$

Según la fórmula (13) el flujo del vector $\boldsymbol{r}$ será igual a

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi}^{2-\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi} (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}^0)\, dz.$$

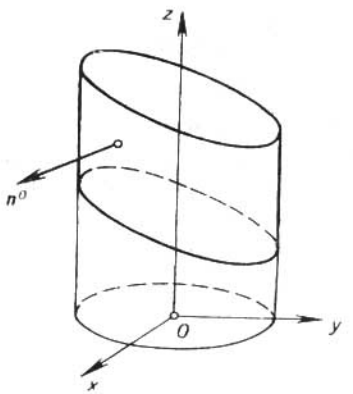


FIG. 25

Pero puesto que en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

$$\boldsymbol{n}^0 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \cos\varphi \cdot \boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{j},$$

entonces

$$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}^0) = x^2 + y^2 = \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$$

y, por consiguiente,

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi}^{2-\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

119. Hallar el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - e^{xyz}\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie lateral exterior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ limitada por los planos $z = 0$ y $x + y + z = 4$.

120. Hallar el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie exterior cilíndrica $x^2 + z^2 = R^2$ limitada por los planos $y = 1$ y $x + y = 4$.

121. Hallar el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j} + xz^3\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie exterior cilíndrica $x^2 + y^2 = 9$ *limitada por la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

122. Hallar el flujo del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - xyz^3\boldsymbol{k}$$

a través del lado exterior de la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ limitada por el plano $z = 0$ y por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

123. Hallar el flujo del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = (xy - y^2)\,\boldsymbol{i} + (2x - x^2 + xy)\,\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie exterior de la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ limitada por el cono elíptico $z^2 = \frac{x^2}{2} + y^2$.

Caso 2). Supongamos que la superficie S es el segmento de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ limitada por las superficies cónicas, las ecuaciones de las cuales en las coordenadas esféricas tienen la forma de $\theta = f_1(\varphi)$, $\theta = f_2(\varphi)$, y por semiplanos $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$.

Hacemos para los puntos de la esfera dada

$$x = R\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta,\quad y = R\,\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta,\quad z = R\cos\theta,$$

donde $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$. *Entonces para el segmento del área* dS obtendremos (fig. 26)

$$dS = R^2\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

En este caso el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}$ a través de la superficie exterior S de la esfera se calcula según la fórmula

$$\Pi = R^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}^0)\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta, \tag{14}$$

donde

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2-R^2)}{|\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2-R^2)|} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{R},$$

Ejemplo 13. Hallar el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = (x - 2y + 1)\,\boldsymbol{i} + (2x + y - 3z)\,\boldsymbol{j} + (3y + z)\,\boldsymbol{k}$$

a través del segmento de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encuentra en el primer octante, en el dominio donde $x^2 + y^2 + z^2 > 1$.

Solución. En este caso tenemos

$$R = 1,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi/2,\ \theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi/2,$$
$$\boldsymbol{n}^0 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0) = x^2 + y^2 + z^2 + x.$$

Introducimos en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ las coordenadas φ y θ de tal modo que

$$x = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta,\ y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,\ z = \cos\theta.$$

Entonces obtendremos

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = 1 + \cos\varphi \operatorname{sen}\theta$$

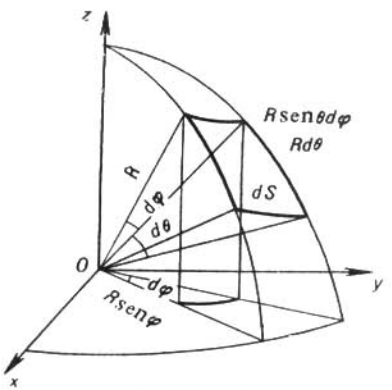


FIG. 26

y, aplicando la fórmula (14), obtendremos

$$\Pi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos\varphi \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

124. Hallar el flujo del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie exterior del segmento de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que corta la superficie cónica $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.

125. Hallar el flujo del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie exterior del segmento de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ que se encuentra en el primer octante.

126. Hallar el flujo del radio vector

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie exterior del segmento de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ limitada por los planos $z = 0$ y $z = y$.

127. Hallar el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada por el plano $z = 2$ $(z \geqslant 2)$.

§ 12. FLUJO DEL VECTOR A TRAVES DE LA SUPERFICIE CERRADA. TEOREMA DE GAUSS—OSTROGRADSKI

Teorema. *Si en algún dominio G del espacio las coordenadas del vector*

$$\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

son continuas y tienen las derivadas parciales continuas $\frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial Q}{\partial y}\,\frac{\partial R}{\partial z}$, *entonces el flujo del vector $\boldsymbol{a}$ a través de cualquier superficie cerrada parcialmente plana Σ que se encuentra en el dominio G, es igual a la integral triple de* $\frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial Q}{\partial y}\,\frac{\partial R}{\partial z}$ *por el dominio V limitado mediante la superficie Σ:*

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = \int\int\int\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \qquad (1)$$

(la fórmula de Gauss — Ostrogradski).

La normal $\boldsymbol{n}$ a la superficie Σ se toma exterior.

Ejemplo 1. Calcular el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

a través de la superficie cerrada

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z = 0 \ (z > 0).$$

Solución. Según la fórmula (1)

$$\Pi = \int\int\int\limits_{V} (2x + 2y + 2z)\, dv. \qquad (2)$$

La integral (2) es muy cómodo calcularla en las coordenadas esféricas r, θ, φ.

Tenemos

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

y elemento del volumen

$$dv = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

entonces

$$\Pi = 2 \iiint_V (r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) + r \cos \theta \, r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \times$$

$$\times d\theta \, d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi +$$

$$+ \cos \theta) \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr = \frac{2R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \frac{\pi R^4}{2}$$

Ejemplo 2. Calcular el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 4x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de la superficie del toro.

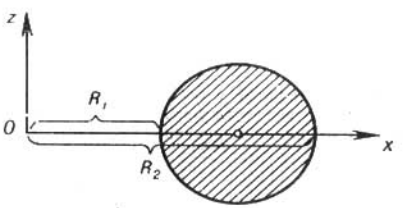


FIG. 27

Solución. Utilizando el teorema de Gauss — Ostrogradski obtendremos que el flujo buscado Π es igual a

$$\Pi = \iint_S (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) \, d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = 4V,$$

donde V es el volumen del toro. Para calcular el volumen V conviene emplear el teorema de Gülden acerca del volumen del cuerpo de revolución según el cual este volumen es igual al producto del área de la figura que gira en la vía que describe el centro de masas de la misma durante la rotación.

Sea R_1 y R_2 los radios interior y exterior del toro (fig. 27). El área S del círculo que forma el toro durante su revolución, es igual a

$$S = \pi \left(\frac{R_2 - R_1}{2} \right)^2.$$

La distancia de la vía que describe el centro de masas —el centro de este círculo— es la longitud l de la circunferencia del radio

$\frac{R_1+R_2}{2}$, es decir

$$l=2\pi\,\frac{R_1+R_2}{2}=\pi\,(R_1+R_2).$$

De tal modo, el volumen V del toro es igual a

$$V=\pi\left(\frac{R_2-R_1}{2}\right)^2\pi\,(R_2+R_1)=\frac{\pi^2}{4}\,(R_2-R_1)^2\,(R_2+R_1).$$

El flujo buscado es igual a

$$\Pi=\pi^2\,(R_2-R_1)^2\,(R_2+R_1).$$

Ejemplo 3. Aplicando el teorema de Gauss — Ostrogradski calcular el flujo del campo vectorial

$$a=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)i+2x\,\mathrm{arctg}\,y\cdot j-\frac{2xz\,(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\,k$$

a través del lado exterior del segmento de la superficie $z=1-x^2-y^2$, que se encuentra sobre el plano xOy.

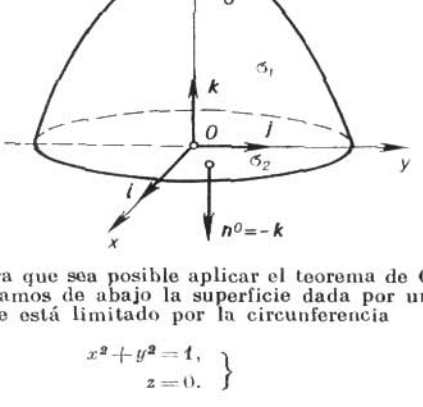


FIG. 28

Solucion. Para que sea posible aplicar el teorema de Gauss — Ostrogradski, cerramos de abajo la superficie dada por una parte del plano xOy que está limitado por la circunferencia

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=1,\\ z&=0.\end{aligned}\right\}$$

Sea v el volumen del cuerpo obtenido limitado por la superficie parcialmente plana σ que se compone de una parte σ_1 del paraboloide de revolución $z=1-x^2-y^2$ y de la parte σ_2 del plano $z=0$ (fig. 28).

El flujo del vector dado a través de la superficie σ según el teorema de Gauss — Ostrogradski es igual a

$$\Pi = \oiint_{\sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

Hallamos la suma

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2xy}{1+y^2} + \frac{2x}{1+y^2} - \frac{2x(1+y)}{1+y^2} = 0.$$

Por consiguiente, el flujo es

$$\Pi = \oiint_{\sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = 0.$$

A la fuerza de la aditividad del flujo obtenemos

$$\Pi = \iint_{\sigma_1} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = 0.$$

De aquí el flujo buscado es

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = -\iint_{\sigma_2} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma.$$

El flujo Π_2 del vector $\boldsymbol{a}$ a través del círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 0$ es igual a

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma.$$

Puesto que en el plano $z = 0$ tenemos

$$\boldsymbol{a} = \frac{x^2 y}{1+y^2}\, \boldsymbol{i} + 2x \operatorname{arctg} y \cdot \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{n}^0 = -\boldsymbol{k},$$

y, por consiguiente, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = 1$, entonces el flujo Π_2 a través del círculo σ_2 será igual al área del círculo σ_2:

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} d\sigma = \pi.$$

El flujo buscado $\Pi_1 = -\Pi_2 = -\pi$.

Cerrando por un modo adecuado las superficies abiertas dadas y utilizando el teorema de Gauss—Ostrogradski, calcular los flujos de los campos vectoriales a través de las superficies indicadas (la normal a la superficie cerrada se toma exterior).

128. $\boldsymbol{a} = (1 - 2x)\, \boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,
S: $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant 4)$.

129. $\boldsymbol{a} = z^2\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$,
S: $x^2 + y^2 = 4 - z$ $(z \geqslant 0)$.
130. $\boldsymbol{a} = (y^2 + z^2)\,\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + 2yz\boldsymbol{k}$,
S: $x^2 + y^2 = y^2$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.

§ 13. DIVERGENCIA DEL CAMPO VECTORIAL. CAMPO SOLENOIDAL

El concepto del flujo del vector a través de la superficie cerrada conduce al concepto de la divergencia del campo. Este concepto da alguna característica cuantitativa del campo en cada uno de sus puntos.

Sea M un punto a estudiar del campo. Vamos a rodearlo con la superficie Σ de una forma arbitraria, por ejemplo, con una esfera del radio suficientemente pequeño. Sea (V) el espacio limitado por la superficie Σ y su volumen sea V. Estudiemos la relación

$$\frac{\iint\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma}{V}. \tag{1}$$

Definición 1. Si la relación (1) tiene el límite finito, cuando el espacio (V) se tiende al punto M, entonces este límite se lo llaman la *divergencia* del campo vectorial (la divergencia del vector $\boldsymbol{a}$) en el punto M y se designa con el símbolo div $\boldsymbol{a}$ (M). Por lo que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}\,(M) = \lim_{(V)\to M} \frac{\iint\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma}{V}. \tag{2}$$

La fórmula (2) da la definición invariante de la divergencia. Esta definición significa que la divergencia del campo $\boldsymbol{a}$ en el punto M es la densidad volumétrica del flujo del vector $\boldsymbol{a}$ en este punto.

Los puntos M del campo vectorial $\boldsymbol{a}$ (M), en los cuales div $\boldsymbol{a} > 0$ se llaman *fuentes*, mientras que los puntos, en los cuales div $\boldsymbol{a} < 0$ se llaman *sumideros* del campo vectorial.

La divergencia del campo vectorial es la función escalar de los puntos del campo.

Si las coordenadas del vector

$$\boldsymbol{a}\,(M) = P\,(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{i} + Q\,(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{j} + R\,(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{k}$$

tienen las derivadas parciales continuas $\frac{\partial P}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ en el entorno del punto M (x, y, z), entonces, utilizando la definición invariante

de la divergencia obtenemos del teorema de Gauss — Ostrogradski que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{3}$$

Todos los valores en la fórmula (3) se consideran en el mismo punto $M(x, y, z)$.

Empleando la fórmula (3) para la divergencia, se puede escribir el teorema de Gauss—Ostrogradski (véase el § 12) en la forma vectorial

$$\iint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = \int\int\int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dv. \tag{4}$$

Ejemplo 1. Aplicando la definición invariante calcular la divergencia del vector $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i}$ en el punto $O(0, 0, 0)$ escogiendo en calidad de las superficies σ que rodean el punto O, las esferas σ_ε del radio ε con el centro en este punto.

Solución. Según la definición de la divergencia en el punto dado tenemos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(0) = \lim_{(\sigma_\varepsilon)\to 0} \frac{\iint_{\sigma_\varepsilon} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma}{v_\varepsilon},$$

donde v_ε es el volumen de la esfera limitada por la esfera σ_ε, o

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\iint_{\sigma_\varepsilon} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma}{v_\varepsilon}.$$

Pero puesto que el volumen de la esfera es igual a $v_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$, entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\iint_{\sigma_\varepsilon} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}.$$

Calculemos el flujo $\iint_{\sigma_\varepsilon} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma$ del vector dado a través de la esfera σ_ε. El versor de la normal $\boldsymbol{n}^0$ a la esfera σ_ε está dirigido por el radio de la esfera, debido a lo que se puede escribir:

$$\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{\boldsymbol{r}}{\varepsilon},$$

donde r^0 es el versor del radio-vector $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, o

$$n^0 = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\varepsilon}.$$

El flujo buscado será igual a

$$\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} (\boldsymbol{a},\ n^0)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon}\, d\sigma.$$

Pasando a las coordenadas en la esfera σ_ε

$$x = \varepsilon \cos\varphi \operatorname{sen}\theta,\quad y = \varepsilon \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,\quad z = \varepsilon\cos\theta,$$

obtenemos

$$\iint\limits_{\sigma_\varepsilon} (\boldsymbol{a},\ n^0)\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\sigma_\varepsilon}\int\limits^{*} \frac{\varepsilon^2 \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta \varepsilon^2 \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta}{\varepsilon} =$$

$$= \varepsilon^3 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}\,(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} = 1.$$

Ejemplo 2. Calcular $\operatorname{div} \boldsymbol{r}$.

Solucion. Tenemos $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, así que $P = x$, $Q = y$, $R = z$ y, por consiguiente, según la fórmula (3)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Ejemplo 3. Calcular $\operatorname{div}(u\cdot\boldsymbol{a})$, donde $u\,(M)$ es la función escalar, $\boldsymbol{a}\,(M) = P\,(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{i} + Q\,(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{j} + R\,(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{k}$ es la función vectorial.

Solución. Utilizando la fórmula (3), hallamos

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = \frac{\partial (uP)}{\partial x} + \frac{\partial (uQ)}{\partial y} + \frac{\partial (uR)}{\partial z} =$$

$$= u\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial Q}{\partial y} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial R}{\partial z} + R\frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= u\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= u\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\ \operatorname{grad} u).$$

De tal modo,

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = u \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, \operatorname{grad} u). \tag{5}$$

Ejemplo 4. Hallar la divergencia del vector

$$\boldsymbol{a} = \varphi(r)\, r^0 = \frac{\varphi(r)}{r}\, \boldsymbol{r},$$

donde $r = |\boldsymbol{r}|$ es la distancia del origen de coordenadas hasta el punto variable $M(x, y, z)$.

Solución. Mediante la fórmula (5) obtendremos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\varphi(r)}{r} \operatorname{div} \boldsymbol{r} + \left(\boldsymbol{r}, \operatorname{grad} \frac{\varphi(r)}{r}\right).$$

En seguida,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3, \quad \operatorname{grad} \frac{\varphi(r)}{r} = \left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)' \operatorname{grad} r =$$

$$= \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2}\, r^0.$$

Por eso

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\varphi(r)}{r} \cdot 3 + \left(\frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2}\, r^0,\ \boldsymbol{r}\right) =$$

$$= 3\frac{\varphi(r)}{r} + \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r} = 2\frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r).$$

131. ¿Para qué función $\psi(r)$ será $\operatorname{div} \psi(r)\, \boldsymbol{r} = 2\psi(r)$?

132. Hallar $\operatorname{div}(r^4 \boldsymbol{r})$.

133. Hallar la divergencia del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}],$$

donde $\boldsymbol{c}$ es el vector constante.

134. Hallar

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{r}\, [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{r}]),$$

donde $\boldsymbol{w}$ es el vector constante.

135. ¿Para qué función $\psi(z)$ la divergencia del campo

$$\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + \psi(z)\, \boldsymbol{k}$$

será igual a z?

136. Hallar el flujo del radio vector $\boldsymbol{r}$ a través de la superficie de esfera.

137. El campo electroestático de la carga puntual q es igual a

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2}.$$

Calcular $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$.

138. Mostrar que

$$\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(r,\ n^0)\,d\sigma = V,$$

donde V es el volumen limitado por la superficie cerrada Σ.

139. Demostrar que si Σ es la superficie parcialmente plana cerrada y c es el vector constante que no es nulo, entonces

$$\iint\limits_{\Sigma}\cos(n,\ c)\,d\sigma = 0,$$

donde n es el vector normal a la superficie Σ.

140. Demostrar la fórmula

$$\iint\limits_{\Sigma}(\varphi a,\ n^0)\,d\sigma = \int\int\int\limits_{V}(\varphi\ \mathrm{div}\ a + (a,\ \mathrm{grad}\ \varphi))\,dv,$$

donde $\varphi = \varphi(x, y, z)$, y Σ es la superficie que limita el volumen V. Determinar las condiciones de la aplicabilidad de la fórmula.

141. Demostrar que si la función $u(x, y, z)$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

entonces

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = 0,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada por la dirección de la normal *exterior a la superficie parcialmente plana cerrada* Σ.

142. Demostrar que si la función $u(x, y, z)$ es el polinomio de la segunda potencia y Σ es la superficie *parcialmente plana cerrada, entonces la integral*

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma$$

es proporcional al volumen limitado por la superficie Σ.

Hallar el flujo del campo vectorial a través de las superficies cerradas señaladas: 1) directamente, 2) mediante el teorema de Gauss—Ostrogradski.

143. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$; $S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 4. \end{cases}$

144. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$; $S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = H, \quad H > 0. \end{cases}$

145. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j}$; $S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2, \quad z \geqslant 0. \end{cases}$

146. $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$; $S: \begin{cases} x^2 + z^2 = y^2, \\ y = 1 \ (0 \leqslant y \leqslant 1). \end{cases}$

147. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$; $S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$

148. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - (z-1)\,\boldsymbol{k}$; $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$

149. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ 3z = x^2 + y^2 \left(z \geqslant \dfrac{x^2+y^2}{3}\right). \end{cases}$

150. $\boldsymbol{a} = yx\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

151. $\boldsymbol{a} = (x+z)\,\boldsymbol{i} + (y+x)\,\boldsymbol{j} + (z+y)\,\boldsymbol{k}$;

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = y, \quad z \geqslant 0. \end{cases}$$

152. $\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$; $S: \begin{cases} 9 - z = x^2 + y^2, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$

153 $\boldsymbol{a} = (y-x)\,\boldsymbol{i} + (z-y)\,\boldsymbol{j} + (x-z)\,\boldsymbol{k}$;

$$S: \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 1, \\ x = 0, \quad z = 0. \end{cases}$$

154. $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$; $S: \begin{cases} 1 - z = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$

CAMPO SOLENOIDAL (TUBULAR)

Definición. Si en todos los puntos M de cierto dominio G la divergencia del campo vectorial (prefijado en el dominio G) es igual a cero

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}\,(M) = 0,$$

entonces se dice que el campo es solenoidal en este dominio.

De tal modo, según la definición, el campo solenoidal no tiene fuentes y sumideros.

Del teorema de Gauss—Ostrogradski sigue que en el campo solenoidal el flujo del vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,(M)$ a través de toda superficie cerrada σ que se encuentra en este campo es igual a cero

$$\oint\limits_{\sigma} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = 0.$$

En el campo solenoidal G las líneas vectoriales no pueden empezarse ni terminarse. Ellas pueden ser las curvas cerradas o pueden tener sus extremos en el límite del campo.

La ecuación

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}\,(M) = 0$$

se llama en hidrodinámica *ecuación de la continuidad del líquido incompresible.*

En este caso la cantidad del líquido que sale a través de alguna superficie cerrada σ, siempre es igual a la cantidad del líquido entrante y el flujo completo es igual a cero.

¿Cuáles de los siguientes campos vectoriales son solenoidales?

155. $\boldsymbol{a} = x\,(z^2 - y^2)\,\boldsymbol{i} + y\,(x^2 - z^2)\,\boldsymbol{j} + z\,(y^2 - x^2)\,\boldsymbol{k}$.

156. $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} - (x^2 + y^3)\boldsymbol{j} + z\,(3y^2 + 1)\,\boldsymbol{k}$.

157. $\boldsymbol{a} = (1 + 2xy)\,\boldsymbol{i} - y^2z\boldsymbol{j} + (z^2y - 2zy + 1)\,\boldsymbol{k}$.

158. Mostrar que el campo del vector

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r^2}\,\boldsymbol{r}^0 \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

es solenoidal en toda región que no contiene el origen de las coordenadas O (0, 0, 0).

159. ¿Para qué condición el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \varphi\,(r)\,\boldsymbol{r}$ será solenoidal?

Dado que tenemos el campo del vector $\boldsymbol{a}\,(M)$ (que no es obligatoriamente solenoidal). Examinemos en el campo un contorno orientado cerrado L. La superficie Σ que está limitada por la línea L, la llamamos *superficie que está tendida sobre el contorno L.*

Conviene orientar la normal n a la superficie Σ de tal modo que del extremo de la normal el elegido recorrido del contorno L sea *visto realizando el movimiento en el sentido antihorario (fig. 29).*

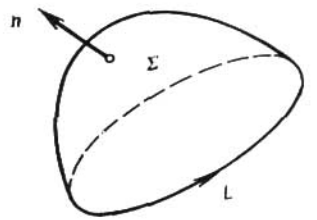


FIG. 29

160. Demostrar que en el campo solenoidal el flujo del vector a (M) no depende del tipo de la superficie Σ que está tendida sobre el contorno L y sólo depende del mismo contorno.

§ 14. INTEGRAL LINEAL EN EL CAMPO VECTORIAL. CIRCULACION DEL CAMPO VECTORIAL

Sean dados el campo vectorial continuo $a = a(M)$ y una curva L parcialmente plana, en la cual está elegida la dirección positiva (curva orientada).

Definición 1. *La integral lineal* del vector $a = a(M)$ a lo largo de la *curva orientada* L es la integral curvilíneal del primer género (la integral por longitud del arco de la curva) del producto escalar (a, τ^0)

$$\int_L (a, \tau^0)\, ds,$$

donde $\tau^0 = \tau^0(M)$ es el versor del vector tangente a la línea L, la orientación del cual coincide con la orientación de L; ds es la diferencial de la longitud del arco s de la curva L.

Si $r = r(M)$ es el radio vector de un punto arbitrario M de la línea L, entonces la integral lineal en el campo $a(M)$ se puede escribir en la forma siguiente:

$$\int_L (a, \tau^0)\, ds = \int_L (a, dr). \qquad (1)$$

Si en el campo vectorial está introducido el sistema rectangular de coordenadas $Oxyz$, entonces $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

y la integral lineal (1) se expresará a través de la integral curvilíneal del segundo género

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

En el caso cuando $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ es el campo de fuerzas, la integral lineal (1) da la magnitud del trabajo de este campo a lo largo de la línea L.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL LINEAL

a) Linealidad:

$$\int_L (\lambda \boldsymbol{a}_1 + \mu \boldsymbol{a}_2, d\boldsymbol{r}) = \lambda \int_L (\boldsymbol{a}_1, d\boldsymbol{r}) + \mu \int_L (\boldsymbol{a}_2, d\boldsymbol{r}),$$

donde λ, μ son los números constantes.

b) Aditividad:

$$\int_{L_1+L_2} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_{L_1} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int_{L_2} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$$

c) Con el cambio de la orientación de la línea L la integral cambia el signo

$$\int_{BA} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\int_{AB} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}),$$

donde A es el punto inicial y B es el punto final de la línea L.

CÁLCULO DE LA INTEGRAL LINEAL EN EL CAMPO VECTORIAL

Sea la línea L prefijada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

al mismo tiempo en el punto inicial A de la línea L el parámetro t toma el valor $t = t_0$, y en el punto final B de la línea L obtiene el valor $t = t_1$ (la dirección en la línea L corresponde al incremento del parámetro t desde t_0 hasta t_1); las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$

tienen las derivadas continuas en el segmento $[t_0, t_1]$. Entonces

$$\int_L (a, dr) = \int_{AB} (a, dr) = \int_{t_0}^{t_1} \{P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\chi'(t)\}\, dt.$$

Si la línea L está prefijada por el sistema de ecuaciones $y = \psi(x)$, $z = \chi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$\int_{AB} (a, dr) = \int_a^b \{P[x, \psi(x), \chi(x)] + Q[x, \psi(x), \chi(x)]\psi'(x) + R[x, \psi(x), \chi(x)]\chi'(x)\}\, dx.$$

Las fórmulas analógicas pueden escribirse también y para aquellos casos, cuando la línea se prefija con uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$x = \varphi(y), \quad z = \chi(y) \qquad (y_0 \leqslant y \leqslant y_1)$$

ó

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z) \qquad (z_0 \leqslant z \leqslant z_1).$$

Ejemplo 1. Hallar la integral lineal del vector $a = \frac{r}{|r|}$, donde r es el radio vector a lo largo del segmento de la recta del punto $A(r_A)$ hasta el punto $B(r_B)$.

Solución. La integral lineal incógnita será

$$\int_{AB} (a, dr) = \int_{AB} \frac{(r, dr)}{|r|}. \tag{1}$$

De la igualdad

$$d(r, r) = (dr, r) + (r, dr) = 2(r, dr)$$

hallamos

$$(r, dr) = \frac{1}{2} d(r, r) = \frac{1}{2} d(|r|^2) = \frac{1}{2} \cdot 2|r|\, d|r| = |r|\, d|r|.$$

De aquí

$$\frac{(r, dr)}{|r|} = d|r|. \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en la integral (1) obtendremos

$$\int_{AB} (a, dr) = \int_{AB} d|r| = \int_{r_A}^{r_B} d|r| = |r_B| - |r_A|.$$

Fíjense bien que

$$|dr| \neq d|r|.$$

Hallar la integral lineal a lo largo del segmento de la recta limitado por los puntos A (r_1) y B (r_2) para los siguientes campos vectoriales:

161. $a = r$.

162. $a = \frac{r}{|r|^2}$.

163. $a = \frac{r^0}{|r|^2}$, r^0 es el versor.

164. Calcular la integral lineal a lo largo de la recta que pasa a través de los puntos O (0, 0, 0 y M_1 (1, 1, 1)

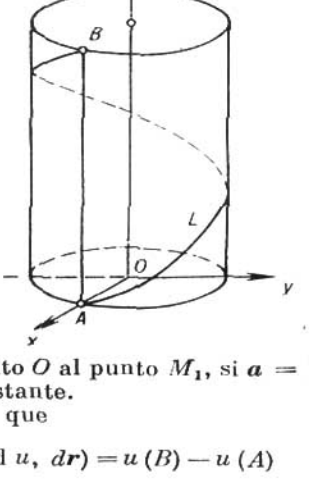


FIG. 30

en dirección del punto O al punto M_1, si $a = [b, r]$, donde b es el vector constante.

165. Demostrar que

$$\int_{AB} (\text{grad } u,\ dr) = u(B) - u(A)$$

Ejemplo 2. Hallar la integral lineal del vector

$$a = zi + xj + yk$$

a lo largo del arco L de la línea helicoidal

$$x = R\cos t, \quad y = R \operatorname{sen} t, \quad z = \frac{t}{2\pi}$$

del punto A de la intersección de la línea con el plano $z = 0$ hasta el punto B de la intersección con el plano $z = 1$ (fig. 30).

Solución. La integral lineal en el ejemplo dado tiene la forma

$$\int_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_L z\,dx + x\,dy + y\,dz.$$

La línea helicoidal se encuentra en el cilindro circular $x^2 + y^2 = R^2$. En el punto A tenemos $t_0 = 0$, en el punto B tenemos $t_1 = 2\pi$. Puesto que

$$dx = -R \operatorname{sen} t\,dt, \quad dy = R \cos t\,dt, \quad dz = \frac{dt}{2\pi},$$

entonces la integral será igual a

$$\int_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{t}{2\pi} R \operatorname{sen} t + R^2 \cos^2 t + \frac{R}{2\pi} \operatorname{sen} t \right) dt =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt - \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \operatorname{sen} t\,dt = \pi R^2 + R,$$

puesto que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi;$$

$$\int_0^{2\pi} t \operatorname{sen} t\,dt = -2\pi.$$

Ejemplo 3. Hallar la integral lineal del vector (véase el ejemplo 2)

$$\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$$

a lo largo de la recta AB (véase la fig. 30) en dirección del punto A al punto B.

Solución. Puesto que la resta AB (generatriz del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$) se encuentra en el plano xOz y pasa a través del punto A $(R, 0, 0)$, entonces $y = 0$, $x = R$, $dx = 0$ y para el radio vector $\boldsymbol{r}$ de los puntos de la recta AB tendremos $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$, $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}\cdot dz$. Por eso el producto escalar

$$(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = z\,dx + x\,dy + y\,dz$$

en la recta AB será igual a cero.

Por consiguiente, la integral lineal incógnita

$$\int_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_{AB} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})$$

en la recta AB será también igual a cero.

De los ejemplos 2 y 3 se desprende que en el caso general la integral lineal en el campo vectorial depende no sólo del punto

inicial y del punto final de la vía de integración, sino y de la forma de esta vía.

Ejemplo 4. Calcular el trabajo del campo de fuerzas

$$F = yi + xj + (x + y + z)\,k$$

a lo largo del tramo AB de la recta que pasa por los puntos M_1 (2, 3, 4) y M_2 (3, 4, 5).

Solución. *El trabajo del campo de fuerzas dado será igual a la* integral lineal a lo largo del tramo M_1M_2:

$$A = \int\limits_{M_1M_2} (F,\ dr) = \int\limits_{M_1M_2} y\,dx + x\,dy + (x+y+z)\,dz.$$

Hallamos las ecuaciones canónicas de la recta M_1M_2. Tenemos

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}.$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned} y &= x+1, \\ z &= x+2, \end{aligned}\right\}$$

$$dy = dx, \quad dz = dx.$$

Aquí x varía en los límites desde 2 hasta 3 (puesto que la abscisa del punto M_1 es igual a 2, y la abscisa del punto M_2 es igual a 3). El trabajo buscado será igual a

$$A = \int\limits_2^3 (x+1+x+x+x+1+x+2)\,dx = \int\limits_2^3 (5x+4)\,dx = \frac{33}{2}.$$

166. Calcular la integral lineal en el campo vectorial plano

$$a = \frac{y^2 i - x^2 j}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a lo largo de la semicircunferencia

$$x = R\cos t, \quad y = R\,\text{sen}\,t \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

167. Calcular la integral lineal en el campo vectorial plano

$$a = (x^2 + y^2)\,i + (x^2 - y)\,j$$

a lo largo de la línea $y = |x|$ del punto $(-1, 1)$ hasta el punto $(2, 2)$.

168. Calcular la integral lineal en el campo vectorial plano

$$a = (x^2 - 2xy)\,i + (y^2 - 2xy)\,j$$

a) a lo largo de la parábola $y = x^2$ del punto $(-1, 1)$ hasta el punto $(1, 1)$;

b) a lo largo del segmento de la recta que une los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

169. Calcular el trabajo del campo de fuerzas $F = 2xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$ a lo largo del arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ x, $y \geqslant 0$ del punto $(1, 0)$ hasta el punto $(0, 1)$ en sentido antihorario.

170. Calcular el trabajo del campo de fuerzas

$$F = (x^2 + 2xy)\,\boldsymbol{i} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{j}$$

a lo largo de la parábola $y = x^2$ del punto $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$.

171. Calcular la integral lineal en el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$$

a lo largo del segmento de la recta del punto $(1, 1, 1)$ hasta el punto $(4, 4, 4)$.

172. Calcular la integral lineal en el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = (y^2 - z^2)\,\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}$$

a lo largo de la línea

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= t^3 \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

en dirección del incremento del parámetro t.

173. Calcular la integral lineal en el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$$

a lo largo de la espira de la línea helicoidal

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\,\mathrm{sen}\,t, \\ z &= bt \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

en dirección del incremento del parámetro t.

174. Calcular la integral lineal en el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

en dirección del punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 1, 1)$ a lo largo del tramo de la recta que pasa por estos puntos.

CIRCULACION DEL CAMPO VECTORIAL Y SU CALCULO

Definición 2. La integral lineal tomada a lo largo de la curva cerrada orientada L se llama la *circulación* C del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$. De tal modo, según la definición

$$C = \oint_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}),$$

donde el símbolo $\oint_L$ significa la integral por la curva cerrada L.

Si el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ se prefija en la forma de coordenadas

$$\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

entonces la circulación del campo vectorial será igual a

$$C = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Ejemplo 5. Calcular la circulación del campo vectorial $\boldsymbol{a} = -y^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j}$ a lo largo de la elipse L: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en dirección contraria a las agujas de un reloj.

Solución. Según la definición de la circulación tenemos

$$C = \oint_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \oint_L -y^3\,dx + x^3\,dy. \tag{3}$$

Las ecuaciones paramétricas de la elipse dada tienen la forma

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\,\mathrm{sen}\,t, \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t < 2. \tag{4}$$

De aquí $dx = -a\,\mathrm{sen}\,t\,dt$, $dy = b\cos t\,dt$. (5)

Sustituyendo (4) y (5) en (3), obtendremos

$$C = ab\int_0^{2\pi} (b^2\,\mathrm{sen}^4 t + a^2\cos^4 t)\,dt = \frac{3}{4}\,\pi ab\,(a^2 + b^2),$$

puesto que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^4 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t\right) dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\,dt = \frac{3}{4}\,\pi.$$

Analógicamente hallamos que

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt = \frac{3}{4}\pi.$$

Ejemplo 6. Calcular la circulación del campo vectorial

$$a = ye^{xy}i + xe^{xy}j + xyzk$$

a lo largo de la línea L la que obtenemos por la intersección del cono $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ con los planos de coordenadas (fig. 31) en la dirección indicada en la figura.

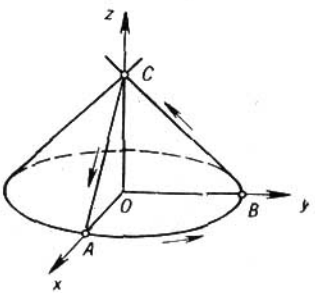


FIG. 31

Solución. La línea L está compuesta de los dos segmentos BC y CA situados en los planos de coordenadas yOz y xOz respectivamente y del arco $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$. Por eso la circulación del campo dado será igual a

$$C = \oint_L (a,\ dr) = \int_{BC} (a,\ dr) + \int_{CA} (a,\ dr) + \int_{\overset{\frown}{AB}} (a,\ dr).$$

1) En el segmento BC tenemos

$x = 0,\ dx = 0;\ z = 1 - y,\ dz = -dy;\quad 1 \geqslant y \geqslant 0.$

Por lo tanto,

$$\int_{BC} (a,\ dr) = \int_{BC} y\, dx = 0.$$

2) En el segmento CA tenemos

$y = 0,\ dy = 0;\ z = 1 - x,\ dz = -dx;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

Por consiguiente,

$$\int_{CA} (a,\ dr) = \int_{CA} x\, dy = 0.$$

3) En el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia $x^2 + \begin{matrix} y^2 = 1 \\ 0 = z \end{matrix}\Big\}$ tenemos $z = 0$, $dz = 0$, y lo que significa

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (a,\ dr) = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} e^{xy}\,(y\,dx + x\,dy) = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} e^{xy} d\,(xy) =$$

$$= \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} d\,(e^{xy}) = e^{xy}\Big|_{A\,(1,\ 0)}^{B\,(0,\ 1)} = 1 - 1 = 0.$$

La circulación buscada del campo vectorial es igual a cero.

Ejemplo 7. Calcular la circulación del campo vectorial

$$a = xyi + yzj + xzk,$$

si

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$

en la dirección correspondiente al recorrido de la proyección L en el plano xOy en sentido antihorario.

Solución. Tenemos

$$C = \oint\limits_L (a,\ dr) = \int\limits_L xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz.$$

La línea L es la elipse que se obtiene como resultado de la sección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$. Hallamos las ecuaciones paramétricas de esta línea. La proyección de cualquier punto de esta línea en el plano xOy se encuentra en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. De aquí obtenemos $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$. Pero la elipse se encuentra en el plano $x + y + z = 1$, de donde $z = 1 - x - y$ o $z = 1 - \cos t - \operatorname{sen} t$. Por consiguiente las ecuaciones paramétricas de la línea L son:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \operatorname{sen} t, \\ z &= 1 - \cos t - \operatorname{sen} t, \end{aligned}\right\} \quad 0 < t < 2\pi.$$

De aquí hallamos

$$dx = -\operatorname{sen} t\,dt,\ dy = \cos t\,dt, \quad dz = (\operatorname{sen} t - \cos t)\,dt,$$

lo que significa que la circulación será igual a

$$C = \int\limits_0^{2\pi} [-\cos t \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t\,(1 - \cos t - \operatorname{sen} t)\cos t +$$

$$+ \cos t\,(1 - \cos t - \operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} t - \cos t)]\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-3\operatorname{sen}^2 t \cos t + \operatorname{sen} 2t - \cos^2 t \operatorname{sen} t - \cos^2 t + \cos^3 t)\, dt = -\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = -\pi.$$

Calcular la circulación C del vector $\boldsymbol{a}$ a lo largo de la línea L en la dirección correspondiente al recorrido de la proyección L en el plano xOy en sentido antihorario.

175. $\boldsymbol{a} = (xz + y)\,\boldsymbol{i} + (yz - x)\,\boldsymbol{j} - (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{k}$;

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

176. $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$;

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx \qquad (z \geqslant 0). \end{cases}$$

177. $\boldsymbol{a} = (2x + z)\,\boldsymbol{i} + (2y - z)\,\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$;
L es la línea de intersección del paraboloide de revolución $x^2 = y^2 = 1 - z$ con los planos de coordenadas.

178. Mostrar que si en el campo vectorial la circulación del vector a lo largo del contorno cerrado cualquiera es igual a cero, entonces en tal campo no pueden existir las líneas vectoriales cerradas.

§ 15. ROTOR (ROTACIONAL) DEL CAMPO VECTORIAL

Sea que tenemos el campo del vector

$$\boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}.$$

Supongamos que las coordenadas P, Q, R del vector $\boldsymbol{a}(M)$ son continuas y tienen las derivadas parciales continuas del primer orden por todos sus argumentos.

Definición 1. *Rotor* del vector $\boldsymbol{a}(M)$ es el vector que se designa con el símbolo rot $\boldsymbol{a}(M)$ y se define por la igualdad

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

o en la forma simbólica más cómoda para la recordación

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Este determinante se desarrolla por lo común respecto de los elementos de la línea primera, con esto las operaciones de multiplicación de los elementos de la segunda línea por los elementos de la tercera línea se entienden como las operaciones de la diferenciación, verbigracia

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Definición 2. Si en algún dominio G tenemos $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$, entonces el campo del vector $\boldsymbol{a}$ en el dominio G se llama *irrotacional*.

Ejemplo 1. Hallar el rotor del vector

$$\boldsymbol{a} = (x + z)\,\boldsymbol{i} + (y + z)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + z)\,\boldsymbol{k}.$$

Solución. Aplicando la fórmula (2), tenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+z & y+z & x^2+z \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera línea y sobreentiendo con esto la operación de multiplicación, por ejemplo $\partial/\partial y$ por $x^2 + z$ como la operación de la diferenciación particular, hallamos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} - (2x - 1)\,\boldsymbol{j}.$$

Ejemplo 2. *Hallar el rotor del vector $\boldsymbol{H}$ de la intensidad del campo magnético en las condiciones del ejemplo 3 § 10.*

Solución. El vector $\boldsymbol{H}$ de la intensidad del campo magnético

$$\boldsymbol{H} = \frac{2}{\rho^2}\,[\boldsymbol{I}, \boldsymbol{r}]$$

o

$$\boldsymbol{H} = \frac{2}{\rho^2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{2I}{\rho^2}\, y\boldsymbol{i} + \frac{2I}{\rho^2}\, x\boldsymbol{j},$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$. De aquí según (2)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{2Iy}{x^2+y^2} & \dfrac{2Ix}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2Ix}{x^2+y^2} \right) + \right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2Iy}{x^2+y^2}\right)\Big]\boldsymbol{k}=2I\left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\boldsymbol{k}=0 \qquad (x^2+y^2\neq 0).$$

De tal modo, rot $\boldsymbol{H}=0$ en todas partes menos el eje Oz, en los puntos del cual las últimas fórmulas pierden el sentido (el denominador se anula), es decir, el campo del vector $\boldsymbol{H}$ es irrotacional en todas partes fuera de los puntos del eje Oz.

Hallar el rotor de los siguientes vectores:

179. $\boldsymbol{a}=(x^2+y^2)\,\boldsymbol{i}+(y^2+z^2)\,\boldsymbol{j}+(z^2+x^2)\,\boldsymbol{k}$.

180. $\boldsymbol{a}=z^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+x^3\boldsymbol{k}$.

181. $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(-y^2\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j})$.

182. Mostrar que si las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}\,(M)$ tienen las derivadas parciales continuas del segundo orden, entonces

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0,$$

o sea que significa que el campo del vector rot $\boldsymbol{a}\,(M)$ es el campo solenoidal.

183. Mostrar que

a) rot $(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\pm\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$,

b) rot $(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$

(λ es la constante numérica).

184. Mostrar que si $u=u\,(M)$ es la función escalar, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\,(M)$ es el vector, entonces

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+[\operatorname{grad}u,\ \boldsymbol{a}].$$

185. Mostrar que si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son los vectores constantes, $\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto $M\,(x, y, z)$, entonces

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}].$$

186. Mostrar que

$$\operatorname{rot}(r\boldsymbol{a})=\frac{1}{r}[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}],$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el vector constante, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

187. Mostrar que rot $(f(r)\,\boldsymbol{a})=\frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}]$, donde $f(r)$ es la función arbitraria que diferenciamos de su argumento, $\boldsymbol{a}$ es el vector constante.

188. Mostrar que el campo vectorial $\boldsymbol{a}=f(r)\,\boldsymbol{r}$ es irrotacional, es decir, rot $\boldsymbol{a}\equiv 0$.

189. *Mostrar que*

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b}, \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \operatorname{rot} \boldsymbol{b}).$$

190. Mostrar que el rotor del campo de las velocidades lineales $\boldsymbol{v}$ del cuerpo sólido que está en revolución es el vector constante dirigido paralelamente al eje de revolución, el módulo del cual es igual a la velocidad angular *doble de revolución:* $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\omega$.

191. Determinar la velocidad angular ω, con la cual el cuerpo sólido gira alrededor del eje fijo que pasa por alguno de sus puntos, si su velocidad lineal

$$\boldsymbol{v} = 2x\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}.$$

192. Mostrar que el campo del rotor del vector $\boldsymbol{a}(M)$ es libre de las fuentes y de sumideros.

193. ¿Cuál debe ser la función $f(x, z)$, para que el rotor del campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + f(x, z)\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

coincida con el vector $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{i}$?

§ 16. TEOREMA DE STOKES

Dado que las coordenadas del vector

$$\boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

son continuas y tienen las derivadas parciales continuas.

Teorema. *La circulación de un vector $\boldsymbol{a}$ a lo largo de un contorno cerrado L es igual al flujo del rotor de este vector a través de la superficie cualquiera Σ tendida en este contorno L:*

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \iint_\Sigma (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma. \tag{1}$$

Se supone que la orientación de la normal $\boldsymbol{n}^0$ a la superficie Σ coincide con la orientación del contorno L de tal modo que de un extremo de la normal el recorrido del contorno en la dirección elegida sea visto realizando el movimiento en sentido antihorario.

Ejemplo 1. Calcular la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ por el contorno L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 3, \end{cases}$ 1) directamente, 2) por el teorema de Stokes.

Solución. 1) El contorno L es la circunferencia del radio $R = 2$, que se encuentra en el plano $z = 3$ (véase la fig. 32). Escoja-

mos la orientación en ella de tal modo como está indicado en la figura. Las ecuaciones paramétricas de la línea L son:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= 2\operatorname{sen} t, \\ z &= 3 \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t < 2\pi,$$

así pues,

$$dx = -2\operatorname{sen} t\, dt,\ dy = 2\cos t\, dt,\ dz = 0.$$

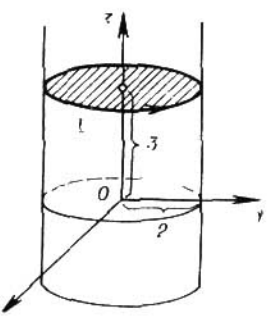


FIG. 32

Para la circulación del vector $\boldsymbol{a}$ tenemos

$$C = \int_0^{2\pi} [2\operatorname{sen} t\,(-2\operatorname{sen} t) + 4\cos^2 t\, 2\cos t - 3\cdot 0]\, dt = -4\pi.$$

2) Para calcular la circulación según el teorema de Stokes escojamos cierta superficie Σ, que está tendida sobre el contorno L. Es natural en la calidad de Σ tomar el círculo cuyo límite es la línea L. De acuerdo con la orientación elegida del contorno es necesario tomar la normal $\boldsymbol{n}^0$ al círculo igual a $\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{k}$. Más adelante

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = (2x-1)\,\boldsymbol{k}.$$

Por eso, según el teorema de Stokes tenemos

$$C = \iint_\Sigma (\operatorname{rot} \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = \iint_\Sigma (2x-1)\, d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho\cos\varphi - 1)\,\rho\, d\rho = -2\pi \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2 = -4\pi.$$

194. Mostrar que el flujo del rotor a través de la superficie no cerrada que está tendida sobre el contorno dado no depende de la forma de superficie.

Hallar la circulación de los vectores directamente por los contornos señalados, en dirección correspondiente al recorrido, en sentido antihorario, de la proyección L en el plano xOy y por el teorema de Stokes.

195. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$; $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$

196. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geqslant 0. \end{cases}$

197. $\boldsymbol{a} = 2xz\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ por el contorno formado mediante la intersección del plano $x + y + 2z = 2$ con los planos de coordenadas.

198. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + (x + y)\,\boldsymbol{k}$; $L: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$

199. $\boldsymbol{a} = z^2\boldsymbol{i}$ $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$

Hallar la circulación de los siguientes campos vectoriales a lo largo de los contornos, la orientación de los cuales coincide con las normales indicadas.

200. $\boldsymbol{a} = zy^2\boldsymbol{i} + xz^2\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$; $L: \begin{cases} x = y^2 + z^2, \quad (\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{i}) \\ x = 9. \end{cases}$

201. $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j}$; $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 3y + 4z = 5. \end{cases} \left(\boldsymbol{n}^0 = \dfrac{3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}}{5}\right)$

202. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = z \end{cases} \left(\boldsymbol{n}^0 = \dfrac{-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}\right)$

203. Dado el campo vectorial de velocidades $\boldsymbol{v}$ de los puntos de un cuerpo sólido que gira con la velocidad angular constante ω alrededor del eje Oz. Calcular la circulación de este campo por la circunferencia

$$L: \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\,\operatorname{sen} t, \\ z = 0 \end{cases} \qquad 0 \leqslant t < 2\pi,$$

directamente y por el teorema de Stokes.

Del teorema de Stokes obtenemos: la proyección del vector rot $\boldsymbol{a}$ a la dirección cualquiera $\boldsymbol{n}$ no depende de la elección del sistema de coordenadas y es igual a la densidad superficial de la circulación del vector $\boldsymbol{a}$ por el contorno del plano que es perpendicular a esta dirección:

$$\operatorname{pr}_{\boldsymbol{n}} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} \mid_M = (\operatorname{rot} \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0) \mid_M = \lim_{(\Sigma) \to M} \frac{\oint\limits_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})}{S}. \qquad (2)$$

Aquí (Σ) es la superficie plana perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$; S es el área de esta superficie; L es el contorno de la superficie orientado de tal modo que el recorrido del contorno sea visto del extremo del vector $\boldsymbol{n}$ en sentido antihorario; la expresión $(\Sigma) \to M$ significa que la superficie (Σ) se tiende al punto M, en el cual se examina el vector rot $\boldsymbol{a}$, con todo eso la dirección de la normal $\boldsymbol{n}$ a esta superficie se queda siempre la misma.

Ejemplo 2. Calcular la densidad de la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i}$ por la circunferencia

$$L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leqslant t < 2\pi, \\ z = 0, \end{cases}$$

en el centro de esta circunferencia M (0, 0, 0) en la dirección positiva del eje Oz.

Solución. Aquí (Σ) es el círculo del radio a con el centro en el punto M, entonces $S = \pi a^2$.

La densidad buscada de la circulación μ_M es igual a

$$\mu_M = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \oint\limits_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \oint\limits_L y\, dx =$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int\limits_0^{2\pi} (-a^2) \operatorname{sen}^2 t\, dt = -1$$

De otra parte

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{k},$$

y, lo que significa,

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n}^0)|_M = (-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}) = -1,$$

que, según (2), confirma la exactitud del resultado.

204. Calcular la densidad de la circulación del vector $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ por la circunferencia L: $\{y = a \cos t,$

$z = a \operatorname{sen} t,\ x = 0;\ 0 \leqslant t < 2\pi\}$ en el centro de esta circunferencia C (0, 0, 0) en la dirección positiva del eje Ox.

205. Calcular la densidad de la circulación del vector $\boldsymbol{a} = 2yi + 5xzj$ por la elipse L: $\{x = a \cos t,\ y = b \operatorname{sen} t,\ z = 1;\ 0 \leqslant t < 2\pi\}$ en el centro de la elipse C (0, 0, 1) en la dirección positiva del eje Oz.

§ 17. INDEPENDENCIA DE LA INTEGRAL LINEAL DE LA VIA DE INTEGRACION. LA FORMULA DE GREEN

Definición. El dominio G del espacio tridimensional es *monoconexo (más precisamente es superficialmente monoconexo, si sobre* todo contorno cerrado que está en este dominio se puede tender la superficie que se encuentra completamente toda en el dominio G. Por ejemplo, todo el espacio tridimensional, el interior de la esfera son los dominios monoconexos; el interior del toro, el espacio tridimensional, del cual se excluye la recta, no son los dominios monoconexos.

Teorema. *Para que la integral lineal*

$$\int_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz$$

no dependa de la forma de la vía de integración L, es necesario y suficiente para que el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = P(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{i} + Q(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{j} + R(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{k}$$

sea irrotacional, es decir,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}\,(M) = 0.$$

Se supone aquí que las coordenadas $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ del vector $\boldsymbol{a}$ tienen las derivadas parciales continuas del primer orden y el dominio de la definición del vector $\boldsymbol{a}\,(M)$ es simplemente conexo.

En este caso la integral lineal $\int_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})$ depende sólo de la *posición de los puntos inicial y final de la vía de integración L.*

Si cumplimos las condiciones del teorema la *circulación del vector $\boldsymbol{a}\,(M)$ por todo contorno cerrado C que se encuentra en el campo del vector $\boldsymbol{a}\,(M)$, es igual a cero:* $\oint_C (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = 0$.

Ejemplo 1. Mostrar que en el campo del vector

$$\boldsymbol{a} = xy^2z\boldsymbol{i} + x^2yz\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}x^2y^2\boldsymbol{k}$$

la integral lineal $\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$ no depende de la forma de la vía de integración L.

Solución. Las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ son las funciones continuas en todas partes, así que el dominio de la determinación de G del vector $\boldsymbol{a}$ es todo el espacio, es decir, es el dominio monoconexo. En este dominio tenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z & x^2yz & \dfrac{1}{2}x^2y^2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Por lo tanto, la integral lineal

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_L xy^2z\,dx + x^2yz\,dy + \frac{1}{2}x^2y^2\,dz$$

no depende de la forma de la vía de integración L.

En particular, para el campo vectorial plano

$$\boldsymbol{a}(M) = P(x, y)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y)\,\boldsymbol{j} \tag{1}$$

tenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Por eso, para el campo vectorial plano (1), determinado en el dominio monoconexo G, la condición $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) = 0$ en la forma de coordenadas se escribe como sigue: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

De tal modo, *para que en el campo plano determinado en el dominio monoconexo G, la integral lineal*

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

no dependa de la forma de la vía de integración es necesario y suficiente que se satisfaga la proporción

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Observación. La exigencia que el dominio G, donde está determinado el vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, sea monoconexo, es esencial. Si el domino G no es monoconexo, entonces para la condición $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) \equiv 0$ la integral lineal puede depender de la forma de la vía de integración.

Ejemplo 2. Examinemos la integral lineal

$$\int_L \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Solución. *La expresión subintegral pierde el sentido en el* punto O (0, 0); por eso excluimos este punto. En la parte restante del plano (esto no será ya el dominio monoconexo) los coeficientes para dx y dy son continuos, tienen las derivadas parciales, continuas y *se cumple la identidad*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

De otra parte, si calculamos esta integral a lo largo de la circunferencia L: $x^2 + y^2 = R^2$, introduciendo los parámetros en la ecuación de esta circunferencia, obtendremos

$$\oint_L \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2\operatorname{sen}^2 t + R^2\cos^2 t}{R^2}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

lo que significa que la circulación es distinta de cero y por tanto la integral lineal depende de la vía de integración.

Determinar en los cuáles campos vectoriales la integral no depende de la forma de la vía de integración:

206. $a = z^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$.

207. $a = \dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$

208. $a = \dfrac{y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{x^2+y^2+z^2}$.

FORMULA DE GREEN

Sea dado en el dominio D con la frontera L el campo vectorial plano

$$\mathrm{a} = \mathrm{P}(x, y)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y)\,\boldsymbol{j},$$

donde las coordenadas $P(x, y)$, $Q(x, y)$ son continuas y tienen las derivadas parciales continuas $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Entonces es cierta la fórmula de Green

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (2)$$

Con esto la frontera L se recorre de tal modo que el dominio D se queda a la izquierda.

El dominio D puede no ser monoconexo, así que su frontera puede componerse de varias partes integrantes (véase fig. 33). En

este caso la integral

$$\int_L P\,dx + Q\,dy$$

representa la suma de integrales por todos los componentes de la frontera del dominio D.

FIG. 33

La fórmula de Green (2) representa el caso particular del teorema de Stokes (véase el § 16).

La fórmula de Green en algunos casos da la posibilidad de simplificar el cálculo de la circulación del campo vectorial.

Ejemplo 3. Calcular la circulación del vector

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{1+x^2+y^2}\,\boldsymbol{i} + y\,[xy + \ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2})]\,\boldsymbol{j}$$

por la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

Solución. La circulación del vector dado es igual a

$$C = \oint_L (\boldsymbol{a},\, d\boldsymbol{r}) = \oint_L \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx + y\,[xy + \ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2})]\,dy.$$

Aquí

$$P = \sqrt{1+x^2+y^2}, \quad Q = xy^2 + y\ln(x+\sqrt{1+x^2+y^2}).$$

Hallamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Aplicando la fórmula de Green, obtendremos

$$C = \iint_D \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) dx\,dy = \iint_D y^2\,dx\,dy.$$

Pasando a las coordenadas polares

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi,$$

obtendremos

$$C = \iint_D \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \rho \, d\rho \, d\varphi = \iint_D \rho^3 \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\rho \, d\varphi.$$

Puesto que $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$, entonces

$$C = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Calcular la circulación de los siguientes vectores por los contornos dados aplicando la fórmula de Green:

209. $\boldsymbol{a} = (y + x)\, \boldsymbol{i} + (y - x)\, \boldsymbol{j}$; L: $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

210. $\boldsymbol{a} = (x - y^2)\, \boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$; L: $y = x$, $y = x^2$.

211. $\boldsymbol{a} = x \ln (1 + y^2)\, \boldsymbol{i} + \frac{x^2 y}{1 + y^2}\, \boldsymbol{j}$; L: $x^2 + y^2 = 2x$.

212. $\boldsymbol{a} = y^2 \boldsymbol{i} - x^2 \boldsymbol{j}$; L: $x + y = -1$, $x = 0$, $y = 0$

213. $\boldsymbol{a} = \dfrac{(3x - y^3 \sqrt{1 + x^2 + 4y^3})\, \boldsymbol{i} + (18y^2 + x^3 \sqrt{1 + x^2 + 4y^3})\, \boldsymbol{j}}{3 \sqrt{1 + x^2 + 4y^3}}$;

L: $x^2 + y^2 = 1$.

214. Mediante la fórmula de Green calcular la diferencia entre las integrales

$$I_1 = \int_{AmB} (x + y)^2 \, dx - (x - y)^2 \, dy$$

e

$$I_2 = \int_{AnB} (x + y)^2 \, dx - (x - y)^2 \, dy,$$

donde AmB es el segmento de la línea recta que une los puntos A (0, 0) y B (1, 1), y AnB es el arco de la parábola $y = x^2$.

215. Demostrar que la magnitud de la integral

$$\oint_L (2x + y) \, dx + 2x \, dy,$$

donde L es el contorno cerrado, da el área del dominio limitado por este contorno.

216. Aplicando la fórmula de Green, calcular la integral lineal $\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$ en el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = (e^x \operatorname{sen} y - y)\,\boldsymbol{i} + (e^x \cos y - 1)\,\boldsymbol{j},$$

donde la línea L es la semicircunferencia superior $x^2 + y^2 = 2x$, que pasa en dirección del punto A (2, 0) hasta el punto O (0, 0).

CAPITULO IV

CAMPO POTENCIAL

§ 18. INDICIOS DE LA POTENCIALIDAD DEL CAMPO

Definición. Campo vectorial $\boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ dado en el dominio espacial V se llama *potencial*, si existe tal función escalar $\varphi(M)$ que en todos los puntos del dominio V se cumple la igualdad

$$\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} \varphi(M). \tag{1}$$

Función $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ que satisface la igualdad (1) en el dominio V se llama *potencial* (o la función potencial) del campo vectorial $\boldsymbol{a}$.

Proporción (1) es equivalente a las tres igualdades escalares

$$P(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{2}$$

El potencial del campo se determina no unívocamente, con la precisión hasta el sumando constante.

Observación. Para los campos de fuerzas el potencial suele llamarse la función $-\varphi(M)$.

Ejemplo 1. (El campo electroestático de la carga puntual). Mostrar que el campo de la intensidad eléctrica $\boldsymbol{E}$ creado por la carga puntual q que está colocada en el origen de coordenadas:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r^3}\,\boldsymbol{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

es el campo potencial.

Solución. El problema se plantea del modo siguiente: mostrar que existe la función $\varphi(x, y, z)$ tal que se cumplen las proporciones (2).

En nuestro caso tenemos

$$P(x, y, z) = \frac{qx}{r^3}, \quad Q(x, y, z) = \frac{qy}{r^3}, \quad R(x, y, z) = \frac{qz}{r^3}.$$

Puesto que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

y por analogía

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{z}{r^3},$$

entonces la función

$$\varphi(x, y, z)=-\frac{q}{r}=-\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

es el potencial del campo dado:

$$\operatorname{grad}\left(-\frac{q}{r}\right)=E.$$

En este ejemplo el origen de coordenadas, donde está concentrada la carga q es el punto especial del campo E.

CRITERIO DE LA POTENCIALIDAD DEL CAMPO VECTORIAL

Teorema 1. *Para que el campo vectorial $\boldsymbol{a}(M)$ prefijado en el dominio monoconexo V, sea de potencial es necesario y suficiente que en cada punto del dominio V se cumpla la condición*

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=0. \tag{3}$$

En otras palabras, para que el campo vectorial dado en el dominio monoconexo sea de potencial, es necesario y suficiente que el campo sea irrotacional.

El potencial $\varphi(x, y, z)$ del campo vectorial

$$\boldsymbol{a}=P(x, y, z)\,\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

se determina por la fórmula

$$\varphi(x, y, z)=\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{4}$$

donde (x_0, y_0, z_0) es cierto punto fijo del campo y (x, y, z) es un punto corriente arbitrario.

Ejemplo 2. Mostrar que el campo del vector

$$\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$$

es de potencial.

Solución. Las coordenadas $P=x^2$, $Q=y^2$, $R=z^2$ del vector $\boldsymbol{a}$ son las funciones infinitamente diferenciables en todo el espacio, así que $\boldsymbol{a}$ es el vector infinitamente diferenciable determinado en todo el espacio tridimensional. Tenemos

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}z^2-\frac{\partial}{\partial z}y^2\right)\boldsymbol{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}x^2-\frac{\partial}{\partial x}z^2\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}y^2-\frac{\partial}{\partial y}x^2\right)\boldsymbol{k}=0.$$

En virtud del teorema 1 el campo del vector $\boldsymbol{a}$ es de potencial. Se ve fácilmente que la función

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + C,$$

donde C, la constante arbitraria, es el potencial del campo dado.

Verificar serán o no de potencial los siguientes campos vectoriales:

217. $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$.

218. $\boldsymbol{a} = (2xy + z^2)\,\boldsymbol{i} + (2yz + x^2)\,\boldsymbol{j} + (2xz + y^2)\,\boldsymbol{k}$.

219. $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}(x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + xz^3\boldsymbol{k})$.

220. $\boldsymbol{a} = yz \cos xy \cdot \boldsymbol{i} + xz \cos xy \cdot \boldsymbol{j} + \operatorname{sen} xy \cdot \boldsymbol{k}$.

221. $\boldsymbol{a} = \ln(1 + z^2)\,\boldsymbol{i} + \ln(1 + x^2)\,\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$.

222. $\boldsymbol{a} = \left(\frac{z}{x^2} + \frac{1}{y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x}\right)\boldsymbol{k}$.

223. $\boldsymbol{H} = \frac{2I}{r_2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$, $r^2 = x^2 + y^2$, $r \neq 0$.

224. Demostrar que el campo $\boldsymbol{a} = f(r) \cdot \boldsymbol{r}$, donde $f(r)$ es la función diferenciable, es de potencial.

225. Mostrar que en el campo de potencial $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi$ las líneas vectoriales son perpendiculares a la superficie del nivel de la función φ.

§ 19. CALCULO DE LA INTEGRAL LINEAL EN EL CAMPO POTENCIAL

Teorema. *La integral lineal en el campo de potencial $\boldsymbol{a}(M)$ es igual a la diferencia de valores del potencial $\varphi(M)$ del campo en los puntos final y inicial de la vía de integración:*

$$\int_{M_1}^{M_2} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \varphi(M_2) - \varphi(M_1). \tag{1}$$

Ejemplo 1. Calcular la integral lineal en el campo del vector

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

a lo largo del segmento de la recta limitado por los puntos $M_1(-1, 0, 3)$ y $M_2(2, -1, 0)$.

Solución. Mostraremos que el campo del vector dado es de potencial. Claro está que

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Se puede convencer fácilmente de que el potencial de este campo

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + C.$$

Empleando la fórmula (1), obtendremos

$$\int_{M_1}^{M_2} (a, dr) = \varphi(2, -1, 0) - \varphi(-1, 0, 3) = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}.$$

Señalemos que no es esencial con qué línea se unen los puntos M_1 y M_2; en cualquier caso para los M_1 y M_2 fijos la integral

$$\int_{M_1}^{M_2} (a, dr) = \int_{M_1}^{M_2} x\,dx + y\,dy + z\,\partial z$$

tiene el mismo valor.

CALCULO DEL POTENCIAL DEL CAMPO EN LAS COORDENADAS CARTESIANAS

Se puede aplicar la fórmula

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \qquad (2)$$

para hallar la función potencial $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ del campo de potencial prefijado

$a(x, y, z) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$.

Para esto fijamos el punto inicial $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y unímosla con el punto corriente $M(x, y, z)$ por medio de la quebrada M_0ABM los brazos de la cual son paralelos a los ejes de coordenadas, precisamente, a $M_0A \parallel Ox$, $AB \parallel Oy$, $BM \parallel Oz$ (véase la fig. 34). Entonces la fórmula (2) obtiene la forma de

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz. \qquad (3)$$

Ejemplo 2. Demostrar que el campo vectorial

$$a = (y + z)\,\boldsymbol{i} + (x + z)\,\boldsymbol{j} + (x + y)\,\boldsymbol{k}$$

es de potencial y hallar su potencial.

Solución. 1er *procedimiento*. La condición necesaria y suficiente de la *potencialidad del campo* $a\,(M)$ es la igualdad a 0 de rot $a\,(M)$. En nuestro caso

$$\operatorname{rot} a=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}=(1-1)\,i+(1-1)\,j+(1-1)\,k=0,$$

es decir, el campo es de potencial. El potencial de este campo se halla con ayuda de la fórmula (3). Tomamos por el punto inicial

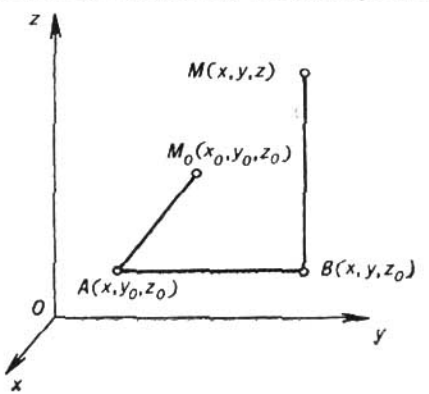


FIG. 34

fijo el origen de coordenadas O (0, 0, 0). Entonces obtendremos

$$\varphi\,(x,\ y,\ z)=\int_0^x (0+0)\,dx+\int_0^y (x+0)\,dy+\int_0^z (x+y)\,dz=xy+xz+yz.$$

Así pues

$$\varphi\,(x,\ y,\ z)=xy+xz+yz+C,$$

donde C es la constante arbitraria.

2° *procedimiento*. Según la definición el potencial $\varphi\,(x,\ y,\ z)$ es tal función escalar, para la cual grad $\varphi=a$. Esta igualdad vectorial es equivalente a las tres igualdades escalares:

$$\frac{\partial}{\partial x}=y+x, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + z, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x + y. \tag{6}$$

Integrando (4) por x, obtendremos

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x (y + z)\, dx = xy + xz + f(y, z), \tag{7}$$

donde $f(y, z)$ es la función diferenciable arbitraria de y y de z. Diferenciando por y ambos miembros de (7) y teniendo en cuenta (5), obtendremos la proporción para hallar la función indefinida de hasta el momento $f(y, z)$. Tenemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + \frac{\partial f}{\partial y}$$

o

$$x + z = x + \frac{\partial f}{\partial y},$$

de donde

$$z = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{8}$$

Al integrar (8) por y obtendremos

$$f(y, z) = \int_0^y z\, dy = zy + F(z) \tag{9}$$

donde $F(z)$ es la función hasta el momento indefinida de z. Sustituyendo (9) en (7), obtendremos

$$\varphi(x\ \ y, z) = xy + xz + zy + F(z).$$

Diferenciando la última igualdad por z y teniendo en cuenta la proporción (6), obtenemos la ecuación para hallar $F(z)$:

$$x + y = x + y + \frac{dF}{dz}.$$

De aquí $\frac{dF}{dz} = 0$, pues $F(z) \equiv C = \text{const}$.

Así

$$\varphi(x, y, z) = xy + yz + zx + C.$$

3° procedimiento. De acuerdo de la definición de la integral completa de la función $\varphi(x, y, z)$ tenemos

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz.$$

Sustituyendo aquí en vez de las derivadas parciales $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sus expresiones de (4), (5), (6) tenemos

$$d\varphi = (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$$

o, después de las transformaciones no complicadas, obtendremos

$$d\varphi = (y\,dx + x\,dy) + (z\,dx + x\,dz) + (y\,dz + z\,dy) =$$
$$= d(xy) + d(xz) + d(yz) = d(xy + xz + yz).$$

Pues

$$d\varphi = d(xy + yz + zx).$$

De aquí se desprende que

$$\varphi(x, y, z) = xy + yz + zx + C.$$

En los problemas siguientes determinar la potencialidad de los *campos vectoriales dados* $\boldsymbol{a}(M)$ y *hallar sus* potenciales $q(M)$:

226. $\boldsymbol{a} = 2xyz\boldsymbol{i} + x^2z\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$.

227. $\boldsymbol{a} = (yz + 1)\,\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$.

228. $\boldsymbol{a} = (2xy + z)\,\boldsymbol{i} + (x^2 - 2y)\,\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$.

229. $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{x + y + z}$

230. $\boldsymbol{a} = \frac{yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}}{1 + x^2y^2z^2}$.

231. $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

232. $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$.

233. $\boldsymbol{a} = r \cdot \boldsymbol{r}$.

En aquel caso, cuando el dominio Ω es estelar con el centro en el origen de coordenadas O (0, 0, 0)*) el potencial $\varphi(M)$ del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ en el punto $M(x, y, z)$ se puede hallar por la

---

*) El *dominio* Ω *se llama estelar respecto al punto* O, perteneciente a Ω, si el segmento que une todo punto del dominio Ω con el punto O se encuentra en dicho dominio. Por ejemplo, en un plano los dominios estelares lo serán el mismo plano, el paralelogramo, el círculo; en el espacio tridimensional serán el mismo espacio, paralelepípado, la esfera.

fórmula

$$\varphi(M) = \int_0^1 (a(M'),\ r(M)\,dt + C, \qquad C = \text{const}, \tag{10}$$

donde $r(M) = xi + yj + zk$ es el radio vector del punto $M(x, y, z)$ y el punto $M'(tx, ty, tz)$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$ recorre el tramo OM de la recta que pasa por los puntos O y M.

Ejemplo 3. Hallar el potencial del campo vectorial

$$a = yzi + xzj + xyk.$$

Solución. Se puede ver fácilmente que rot $a \equiv 0$, es decir, el campo vectorial dado es potencial. Este campo está determinado en todo el espacio tridimensional que es estelar con el centro en el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$, por lo tanto para hallar su potencial apliquemos la fórmula (10). Puesto que en el caso dado

$$a(M') = a(tx,\ ty,\ tr) = t^2yzi + t^2xzj + t^2xyk,$$

entonces el producto escalar de los vectores $a(M')$ y $r(M)$ es igual a

$$(a(M'),\ r(M)) = t^2(xyz + xyz + xyz) = 3t^2xyz.$$

El potencial buscado

$$\varphi(M) = \int_0^1 (a(M'),\quad r(M))\,dt = xyz \int_0^1 3t^2\,dt + C = xyz + C.$$

Pués

$$\varphi(M) = xyz + C.$$

Aplicando la fórmula (10), hallar los potenciales de los siguientes campos vectoriales:

234. $a = \alpha i + \beta j + \gamma k$, donde α, β, γ son constantes.

235. $a = (y + z)\,i + (x + z)\,j + (y + x)\,k$.

236. $a = yi + xj + e^z k$.

237. $a = e^x \operatorname{sen} y \cdot i + e^z \cos y \cdot j + k$.

CAPITULO V

OPERADOR DE HAMILTON. OPERACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN OPERADOR DE LAPLACE

§ 20. OPERADOR DE HAMILTON «NABLA»

Muchas operaciones del análisis vectorial pueden ser escritas en la forma abreviada y cómoda para los cálculos mediante el operador simbólico de Hamilton «nabla»:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (1)$$

En este operador se unen las propiedades diferenciales y vectoriales. Vamos a entender la multiplicación formal $\frac{\partial}{\partial x}$ por la función $f(x, y, z)$ como la diferenciación particular $\frac{\partial f}{\partial x}$.

En los límites del álgebra vectorial las operaciones formales con el operador «nabla» vamos a efectuarlas de tal manera como si fuera el operador el mismo vector. Utilizando este formalismo obtenemos lo siguiente.

1. Si $u = u(x, y, z)$ es la función escalar diferenciable, entonces según la regla de multiplicación del vector por escalar tenemos

$$\nabla u = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z} = \operatorname{grad} u. \qquad (2)$$

2. Si $a = P(x, y, z)\, i + Q(x, y, z)\, j + R(x, y, z)\, k$ donde P, Q, R son las funciones diferenciables, entonces de acuerdo con la fórmula conocida para el producto escalar tenemos

$$(\nabla, a) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}, Pi + Qj + Rk\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} a, \qquad (3)$$

en particular, $(\nabla, c) = 0$ (c es un vector constante).

3. Si $\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$, entonces

$$[\nabla, \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \tag{4}$$

en particular, $(\nabla, \boldsymbol{c}) = 0$ ($\boldsymbol{c}$ es un vector constante).

Al continuar efectuando el formalismo de operaciones con ∇ como con el vector, obtenemos de la propiedad distributiva para el producto escalar y vectorial lo siguiente

$$(\nabla, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (\nabla, \boldsymbol{a}) + (\nabla, \boldsymbol{b}), \tag{5}$$

es decir $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{div} \boldsymbol{b}$,

$$[\nabla, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}] = [\nabla, \boldsymbol{a}] + [\nabla, \boldsymbol{b}], \tag{6}$$

es decir $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$.

Las fórmulas (5) y (6) se pueden interpretarse también como la demostración de las propiedades diferenciales del operador «nabla» (∇ es el operador lineal diferencial).

Utilizando el formalismo de las operaciones con el operador ∇ como con el vector conviene tener en cuenta que ∇ *no es el vector*, él no tiene ni el valor, ni dirección y de modo que, por ejemplo, el vector $[\nabla, \boldsymbol{a}]$ no será en general perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$ (sin embargo, para el campo plano $\boldsymbol{a} = P(x, y)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y)\,\boldsymbol{j}$ el vector

$$[\nabla, \boldsymbol{a}] = \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \boldsymbol{k}$$

será perpendicular al plano xOy, y lo que significa, al vector $\boldsymbol{a}$). Igualmente respecto al vector simbólico ∇ el concepto de colinealidad pierde el sentido. Por ejemplo, la expresión $[\nabla\varphi, \nabla\psi]$, donde φ y ψ son unas funciones escalares formalmente recuerda el producto vectorial de dos vectores colineales que siempre es igual a cero. Pero en un caso general este fenómeno no existe. En realidad, el vector $\nabla\varphi = \operatorname{grad} \varphi$ está dirigido por la normal a la superficie del nivel $\varphi = \text{const}$, y el vector $\nabla\psi = \operatorname{grad} \psi$ determina la normal a la superficie del nivel $\psi = \text{const}$ y estas normales en el caso general no obligatoriamente deben ser colineales (fig. 35). De otra parte, en todo campo escalar diferenciable φ tenemos $[\nabla\varphi, \nabla\varphi] = 0$. Estos ejemplos muestran que es menester emplear cuidadosamente el operador ∇.

Junto con la propiedad vectorial el operador de Hamilton «nabla» tiene la propiedad diferencial. Teniendo en cuenta la cualidad diferencial de ∇ *nos convenimos en considerar* que el operador ∇ influye sobre todas las magnitudes escritas tras él. En este sentido podemos decir que $(\nabla, \boldsymbol{a}) \neq (\boldsymbol{a}, \nabla)$. En realidad,

$$(\nabla, \boldsymbol{a}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a},$$

al mismo tiempo

$$(\boldsymbol{a}, \nabla) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$$

es el operador diferencial escalar.

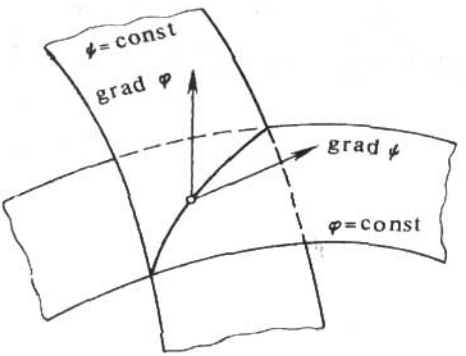


FIG. 35

Aplicando el operador ∇ al producto de magnitudes cualesquiera hay que tener en cuenta la regla de *diferenciación del producto*

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De aquí se deduce que el operador «nabla» es menester aplicar por turno a cada multiplicador dejando invariables los multiplicadores restantes y luego usar la suma de las expresiones obtenidas. Con todo eso, vamos a tomar en consideración las reglas siguientes.

1°. Si el operador ∇ actúa sobre cualquier producto, entonces primeramente se toma en cuenta su carácter diferencial y luego sus propiedades vectoriales.

2°. Para subrayar el hecho de que «nabla» no influye en magnitud cualquiera que entra en composición de una fórmula compleja esta magnitud se designa con el índice c (const), el cual en el resultado definitivo puede ser quitado.

3°. Todas las magnitudes, en las cuales el operador «nabla» no ejerce la influencia, en el resultado definitivo se colocan delante de «nabla», es decir a la izquierda de él.

Ejemplo 1. Mostrar que

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, \operatorname{grad} u).$$

es la función vectorial.

Solución. En la forma simbólica

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = (\nabla,\ u\boldsymbol{a}).$$

Al principio teniendo en cuenta el carácter diferencial de ∇, tenemos que escribir

$$(\nabla,\ u\boldsymbol{a}) = (\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}) + (\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c).$$

Examinando la expresión $(\nabla,\ u_c\boldsymbol{a})$ podemos el multiplicador constante u_c sacar fuera del signo «nabla» y como el escalar sacar fuera del signo del producto escalar lo que da

$$(\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}) = (u_c\nabla,\ \boldsymbol{a}) = u_c\,(\nabla,\ \boldsymbol{a}) = u\,(\nabla,\ \boldsymbol{a})$$

(en la última etapa hemos omitido el índice c).

En la expresión $(\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c)$ el operador ∇ actúa sólo en la función escalar u; por lo tanto podemos escribir que

$$(\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c) = (\nabla u,\ \boldsymbol{a}_c) = (\boldsymbol{a}_c,\ \nabla u) = (\boldsymbol{a},\ \nabla u).$$

Como resultado obtenemos la fórmula

$$(\nabla,\ u\boldsymbol{a}) = u\,(\nabla,\ \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},\ \nabla u)$$

o

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a},\ \operatorname{grad} u).$$

Ejemplo 2. Mostrar que

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{rot}\boldsymbol{a} - [\boldsymbol{a},\ \operatorname{grad} u].$$

Solución. En la forma simbólica

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = [\nabla,\ u\boldsymbol{a}].$$

Teniendo en cuenta las propiedades diferenciales de ∇, escribimos primeramente

$$[\nabla,\ u\boldsymbol{a}] = [\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}] + [\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c]. \tag{7}$$

Luego en el primer sumando a la derecha sacamos el multiplicador escalar u_c fuera del signo ∇ y del producto vectorial lo que da

$$[\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}] = u_c\,[\nabla,\ \boldsymbol{a}] = u\,[\nabla,\ \boldsymbol{a}].$$

En el segundo sumando en (7) referimos u al operador ∇ y cambiamos el orden de multiplicadores para que el vector $\boldsymbol{a}_c$, en el cual «nabla» no influye, se encuentre delante de ∇. Lo que da

$$[\nabla,\ u\boldsymbol{a}_c] = [\nabla u,\ \boldsymbol{a}_c] = -[\boldsymbol{a},\ \nabla u].$$

De tal modo

$$[\nabla,\ u_c\boldsymbol{a}] = u\,[\nabla,\ \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{a},\ \nabla u]$$

o

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{rot}\boldsymbol{a} - [\boldsymbol{a},\ \operatorname{grad} u].$$

Ejemplo 3. Aplicando el método simbólico hallar $\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$.

Solución. Tenemos

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] = (\nabla,\ [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]) = (\nabla,\ [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_c]) + (\nabla,\ [\boldsymbol{a}_c,\ \boldsymbol{b}]). \tag{8}$$

Usando la propiedad de la permutación cíclica de multiplicadores en el producto mixto, transformamos las expresiones en el segundo miembro (8) de tal manera para que todas las magnitudes constantes

resulten delante del operador ∇, mientras que las variables tras él. Es decir, obtenemos

$$\operatorname{div}[a, b] = ([\nabla, a], b_c] - (\nabla, [b, a_c]) =$$
$$= ([\nabla, a], b_c) - ([\nabla, b], a_c) = (b, [\nabla, a]) - (a, [\nabla, b]),$$

o sea $\operatorname{div}[a, b] = (b, \operatorname{rot} a) - (a, \operatorname{rot} b)$.

Observación. Aplicando el método simbólico podemos evitar las transformaciones analíticas muy complicadas y obtenemos pronto el resultado definitivo. Pero, de otra parte, las diferentes transformaciones formales con el operador «nabla» es necesario efectuar con mucho cuidado, en el caso contrario son posibles, como hemos visto, unos errores muy graves. Por tanto, si no hay la seguridad completa en el resultado obtenido, conviene controlarlo *mediante el método analítico.*

238. Mostrar que

a) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$;

b) $\nabla f(u) = f'(u)\,\nabla u$.

239. Demostrar que el vector $[\nabla u, \nabla v]$ es solenoidal, si u y v son las funciones escalares diferenciables.

Utilizando el operador de Hamilton ∇, demostrar las siguientes igualdades:

240. a) $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;

b) $\operatorname{rot}[a, b] = (b, \nabla)\,a - (a, \nabla)\,b + a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a$.

241. $\operatorname{rot}[a, r] = 2a$, a es un vector constante.

242. Demostrar que el vector $a = u \operatorname{grad} v$ es ortogonal al $\operatorname{rot} a$.

§ 21. OPERACIONES DIFERENCIALES DEL SEGUNDO ORDEN. OPERADOR DE LAPLACE

Operaciones diferenciales del segundo orden se obtienen de resultas de la aplicación doble del operador ∇ a los campos.

Sea que tenemos el campo escalar $u = u(M)$. En este campo el operador ∇ engendra el campo vectorial $\nabla u = \operatorname{grad} u$.

En el campo vectorial ∇u *el operador* ∇, *aplicado reiteradamente al* ∇u da el campo escalar

$$(\nabla, \nabla u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u \qquad (1)$$

y el campo vectorial

$$[\nabla, \nabla u] = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u. \qquad (2)$$

Si está prefijado el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, entonces el operador ∇ engendra en él el campo escalar $(\nabla, \boldsymbol{a}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a}$. En el campo escalar $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ el operador ∇ engendra el campo vectorial

$$\nabla (\nabla, \boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a}. \tag{3}$$

En el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ el operador ∇ engendra también el campo vectorial $[\nabla, \boldsymbol{a}] = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$. Aplicando a este campo otra vez el operador ∇ obtenemos el campo escalar

$$(\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} \tag{4}$$

y el campo vectorial

$$[\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}. \tag{5}$$

Las fórmulas (1)—(5) determinan así llamadas operaciones diferenciales del segundo orden.

Ejemplo 1. Sea la función $u = u(x, y, z)$ tiene las derivadas parciales continuas hasta el segundo orden inclusive. Demostrar que

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0.$$

Solución. 1er *procedimiento.* Actuando formalmente obtenemos

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla]\, u = 0,$$

puesto que $[\nabla, \nabla] = 0$ como el producto vectorial de dos «vectores» iguales.

2° *procedimiento.* Empleando las expresiones del gradiente y del rotor en las coordenadas cartesianas y tomando en consideración las condiciones dadas obtendremos

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \boldsymbol{j} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y} \right) \boldsymbol{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} \right) \boldsymbol{k} = 0,$$

puesto que las derivadas mixtas en este caso son iguales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}.$$

Análogamente se demuestra que para el campo vectorial

$$a = P(x, y, z)\, i + Q(x, y, z)\, j + R(x, y, z)\, k,$$

las coordenadas P, Q, R del cual tienen las derivadas parciales continuas del segundo orden, obtenemos div rot $a = 0$.

Prestemos especial atención a la operación diferencial del segundo orden div grad $u = [\nabla, \nabla u]$. Suponiendo que la función $u(x, y, z)$ tiene segundas derivadas parciales por x, y, y z, tenemos

$$(\nabla, \nabla u) = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k,\ \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u.$$

Entonces $(\nabla, \nabla u) = \Delta u$, donde el símbolo $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ se llama el *operador de Laplace*. Se puede representarlo como el producto escalar del operador de Hamilton ∇ sobre sí mismo, es decir,

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Este operador juega un papel importante en la física matemática.

Estudiemos una operación más del segundo orden rot rot a. Tenemos rot rot $a = [\nabla, [\nabla, a]]$. Apliquemos la fórmula para el producto vectorial doble escrita en la forma de $[A, [B, C]] = B(A, C) - (A, B)C$. Sustituyendo en esta fórmula A en ∇, B en ∇, C en a, obtendremos

$$[\nabla, [\nabla, a]] = \nabla(\nabla, a) - (\nabla, \nabla) a = \nabla(\nabla, a) - \Delta a, \qquad (6)$$

es decir,

$$\text{rot (rot } a) = \text{grad div } a - \Delta a,$$

donde $\Delta a = \Delta P \cdot i + \Delta Q \cdot j + \Delta R \cdot k$.

Las operaciones diferenciales del segundo orden para mejor claridad se puede representarlas en la tabla siguiente:

	Campo escalar u	Campo vectorial a	
	grad	div	rot
grad		grad div a	
div	div grad $u = \Delta u$		div rot $a = 0$
rot	rot grad $u = 0$		rot rot $a =$ $= \text{grad div } a - \Delta a$

Ejemplo 2. Las leyes de la teoría clásica del electromagnetismo se postulan en forma del sistema de ecuaciones de Maxwell.

En el caso más simple del medio no conductor, homogéneo e isotrópico siendo ausentes las cargas y corrientes este sistema tiene la forma de

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = [\nabla, H], \tag{7}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = [\nabla, E], \tag{8}$$

$$(\nabla, E) = 0, \tag{9}$$

$$(\nabla, H) = 0. \tag{10}$$

Aquí E y H son los vectores de la intensidad de los campos eléctrico y magnético; ε y μ son los coeficientes de la permeabilidad eléctrica y magnética (en nuestras suposiciones ε, μ = const); c es la velocidad de la luz en el vacío.

Por lo que las derivadas espacial y temporal conmutan, o sea,

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla, H] = \left[\nabla, \frac{\partial H}{\partial t}\right],$$

entonces diferenciando (7) por t obtendremos

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left[\nabla, \frac{\partial H}{\partial t}\right].$$

Sustituyendo $\frac{\partial H}{\partial t}$ de (8) hallamos $\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{c}{\mu}[\nabla, [\nabla, E]]$ o

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = [\nabla, [\nabla, E]]. \qquad (11)$$

En vigor de la fórmula (6) $[\nabla, [\nabla, E]] = \nabla(\nabla, E) - \nabla E$. Puesto que $(\nabla, E) = 0$, entonces de (11) tenemos

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \Delta E.$$

Pues, para el campo vectorial E obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta E.$$

Esta es una de las ecuaciones principales de la física matemática que se llama la *ecuación de la onda*.

Es muy fácil cerciorarse (¡verifique esto!) de que el campo vectorial H satisface precisamente a la misma ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta H.$$

De tal modo, cada una de las coordenadas E_x, E_y, E_z y H_x, H_y, H_z de los vectores E y H satisface, en nuestras condiciones, la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Aquí $a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ es la velocidad de propagación del proceso. En el vacío para $\varepsilon = \mu = 1$ tenemos $a = c$, es decir, en el vacío los procesos electromagnéticos se propagan con la velocidad de la luz.

243. Mostrar que toda solución de la ecuación $[\nabla, [\nabla, A]] - k^2 A = 0$ que satisface la condición de solenoidad, satisface la ecuación vectorial de Helmholtz $\nabla^2 A + k^2 A = 0$.

Definición. El campo escalar $u = u(x, y, z)$ que satisface la condición $\Delta u = 0$ se llama *campo de Laplace* o *campo armónico*.

Ejemplo 3. El ejemplo importante del campo armónico es el campo escalar $u = k/r$, $k = \text{const}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Esta función representa por sí misma el potencial del campo de gravitación que crea la masa puntual colocada en el origen de coordenadas. No es muy difícil de comprobar que la función $u = k/r$ es armónica en todas las partes menos en el origen de coordenadas, donde ella *no está definida*. *En realidad*

$$\left(\nabla, \nabla\frac{k}{r}\right) = k\left(\nabla, \nabla\frac{1}{r}\right) = k\left(\nabla, -\frac{1}{r^2}\nabla r\right) =$$

$$= -k\left(\nabla, \frac{1}{r^2}r^0\right) = -k\left(\nabla\frac{1}{r^2}, r^0\right) - k\frac{1}{r^2}(\nabla, r^0) =$$

$$= k\left(-\frac{2}{r^3}\nabla r,\ r^0\right) - \frac{k}{r^2}(\nabla,\ r^0) = \frac{2k}{r^3}(r^0,\ r^0) -$$

$$-\frac{k}{r^2}(\nabla,\ r^0) = \frac{2k}{r^3} - \frac{k}{r^2}\cdot\frac{2}{r} = 0$$

para todos $r \neq 0$, puesto que

$$(\nabla,\ r^0) = \left(\nabla,\ \frac{r}{r}\right) = \left(\nabla\frac{1}{r},\ r\right) + \frac{1}{r}(\nabla,\ r) =$$

$$= \left(-\frac{\nabla r}{r^2},\ r\right) + \frac{3}{r} = -\frac{1}{r^2}(r^0,\ r) + \frac{3}{r} = -\frac{1}{r}(r^0,\ r^0) + \frac{3}{r} =$$

$$= -\frac{1}{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}.$$

Ejemplo 4. Demostrar que en el campo de potencial del vector $\boldsymbol{a}$ su función potencial $u(x, y, z)$ satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho(x, y, z), \qquad (12)$$

donde $\rho(x, y, z)$ es la divergencia del vector $\boldsymbol{a}$.

Solución. Según la condición

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \rho.$$

Puesto que el campo del vector $\boldsymbol{a}$ es de potencial, entonces $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$, donde u es el potencial del campo. Sustituyendo en (13) $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$ obtenemos $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \rho$ o, ya que $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$, entonces $\Delta u = \rho$.

Para el caso particular, en los puntos del campo en los que la divergencia es igual a cero, la ecuación (12) se transforma en la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$. La ecuación de Laplace—Poisson da la posibilidad de hallar la función potencial u mediante la integración de la ecuación diferencial en las derivadas parciales. En ciertos casos esto resulta ser más cómodo.

Muchas veces en electroestática prefieren en vez de la función u tomar la función inversa por el signo $v = -u$. Entonces $\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} v$. De acuerdo con lo que en la teoría del campo electroestático la ecuación de Poisson tiene la forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \qquad (14)$$

Examinemos un ejemplo elemental para la aplicación de la ecuación de Poisson.

Ejemplo 5. Sea dos láminas paralelas infinitas, encargadas con las cargas distintas, AA_1 y BB_1 tienen los potenciales v_1 y v_2, pero para la mayor precisión $v_1 > v_2$. Hallar el campo $\boldsymbol{E}$ entre las láminas (fig. 36).

Solución. Dirigimos el eje Ox perpendicularmente a estas láminas en dirección del decrecimiento del potencial, y el plano yOz lo hacemos coincidir con la lámina AA_1 que tiene la carga

positiva. Vamos a buscar la función potencial de la ecuación de Poisson. En virtud de la simetría del problema respecto al eje Ox y de la infinidad de láminas se puede concluir que como las superficies equipotenciales serán los planos paralelos a las láminas, y la

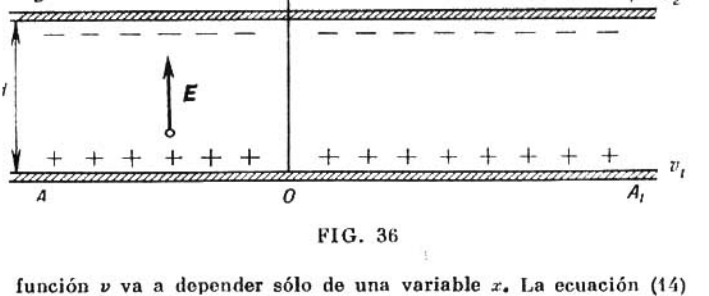


FIG. 36

función v va a depender sólo de una variable x. La ecuación (14) obtiene la forma

$$\frac{d^2v}{dx^2}=0, \tag{15}$$

puesto que las cargas volumétricas faltan en todo el espacio entre las láminas. Integrando (15), hallamos

$$v = C_1x + C_2 \tag{16}$$

(C_1, C_2 son las constantes arbitrarias).

Vamos a exigir que para $x = 0$ la función v obtenga el valor v_1 y para $x = d$, donde d es la distancia entre las láminas, ella obtenga el valor v_2. Lo que da $C_2 = v_1$, $v_2 = C_1d + C_2$, de donde $C_2 = v_1$, $C_1 = \frac{v_2-v_1}{d}$. Sustituyendo estos valores de C_1, C_2 en (16), obtendremos

$$v=\frac{v_2-v_1}{d}\,x+v_1=v_1-\frac{v_1-v_2}{d}\,x.$$

El vector E se determina según la fórmula $E = -\text{grad}\ v$, lo que da

$$E=\frac{v_1-v_2}{d}\,i,$$

entonces el campo será homogéneo y será dirigido por el eje Ox. La magnitud E en todo punto es igual a $|E| = \frac{v_1-v_2}{d}$, es decir, es igual a la caída del potencial por la unidad de la distancia mínima entre las láminas.

244. *Sea que la función escalar* $\varphi(M)$ *satisface la* ecuación de Laplace. Mostrar que el vector $\nabla\varphi$ es solenoidal y irrotacional.

245. Mostrar que $\Delta(uv) = u\,\Delta v + v\,\Delta u + 2(\nabla u, \nabla v)$.

246. Demostrar que si $\boldsymbol{r}$ es radio vector, entonces

$$\Delta r = \begin{cases} \frac{2}{r} & \textit{en el espacio}, \\ \frac{1}{r} & \text{en el plano}. \end{cases}$$

247. Verificar: ¿son armónicos o no los siguientes campos escalares?

a) $u = x^2 + 2xy - y^2$,

b) $u = x^2y + y^2z + z^2x$,

c) $u = x^2 - y^2$.

248. Mostrar que el campo escalar

$$u = \ln\frac{1}{r}, \quad \text{donde } r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (r \neq 0),$$

es armónico.

249. Hallar todos los campos armónicos que dependen solo de x.

250. Hallar el aspecto general del polinomio homogéneo *armónico de la segunda potencia de* x *e* y.

251. Hallar todas las soluciones de la ecuación de Poisson $\Delta u = x^{n-2}$ que dependen sólo de x.

Ejemplo 6. Fórmulas de Green. Sean φ, ψ dos funciones escalares del punto. Vamos a componer el vector $\boldsymbol{a} = \varphi \operatorname{grad}\psi$. Entonces $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi) = \varphi \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi) = \varphi\cdot\Delta\psi + (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)$.

Ahora empleando la fórmula de Gauss—Ostrogradski, tenemos:

$$\iint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0)\, d\sigma = \int\int\int_{V} \operatorname{div}\boldsymbol{a}\, dv.$$

Notamos que en nuestro caso

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) = (\varphi \operatorname{grad}\psi, \boldsymbol{n}^0) = \varphi(\operatorname{grad}\psi, \boldsymbol{n}^0) = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}.$$

Como resultado obtenemos la *primera fórmula de Green*

$$\int\int\int_{V} [\varphi\Delta\psi + (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)]\, dv = \iint_{\Sigma} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma \qquad (17)$$

la cual para $\varphi = \psi$ se convierte en la fórmula

$$\iiint_V [\varphi \Delta\varphi + |\operatorname{grad}\varphi|^2]\, dv = \oiint_\Sigma \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma. \qquad (18)$$

Si en la fórmula (17) poner $\varphi \equiv 1$, entonces obtenemos

$$\iiint_V \Delta\psi\, dv = \oiint_\Sigma \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma.$$

En la fórmula (17) cambiamos de sitios φ y ψ y restamos la fórmula obtenida

$$\iiint_V [\psi\Delta\varphi + (\operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad}\varphi)]\, dv = \oiint_\Sigma \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

de la fórmula (17). Obtendremos entonces la *segunda fórmula de Green*

$$\iiint_V (\varphi\cdot\Delta\psi - \psi\cdot\Delta\varphi)\, dv = \oiint_\Sigma \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Se supone aquí que todas las funciones, con las cuales operamos, lo mismo que sus derivadas que se encuentran en las fórmulas, son continuas en el dominio que examinamos.

Ejemplo 7. Hallar la integral superficial

$$I = \oiint_\Sigma \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma,$$

tomada por la esfera Σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para $\varphi = x^2 + y^2$ y $\psi = y^2 + z^2$.

Solución. En virtud de la primera fórmula de Green la integral incógnito es igual a

$$I = \iiint_V [\varphi\,\Delta\psi + (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)]\, dv,$$

donde el dominio de integración V es la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

Tenemos $\Delta\psi = 4$, $\operatorname{grad}\varphi = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$, $\operatorname{grad}\psi = 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$; $(\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi) = 4y^2$, por lo tanto

$$I = \iiint_V (4x^2 + 4y^2 + 4y^2)\, dv = 4 \iiint_V (x^2 + 2y^2)\, dv.$$

Pasando a las coordenadas esféricas $x = r\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta$, $y = r\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\theta$, obtendremos

$$I = 4\int\limits_V\int\int (r^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta + 2r^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta)\, r^2\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\varphi + 2\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\, d\theta \int\limits_0^1 r^4\, dr =$$

$$= \frac{4}{5}\int\limits_0^{2\pi}(1+\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{12}{5}\pi\left(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{16}{5}\pi.$$

Ejemplo 8. Hallar la integral superficial

$$I = \iint\limits_{\Sigma}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma,$$

tomado por la superficie Σ: $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$, $H > 0$, si $\varphi = x^2 + y^2 + x + z$, $\psi = x^2 + y^2 + 2z + x$.

Solución. La integral buscada según la segunda fórmula de Green es igual a

$$I = \int\limits_V\int\int (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\, dv.$$

Para las funciones dadas φ y ψ tenemos $\Delta\varphi = 4$, $\Delta\psi = 4$ y por consiguiente,

$$I = -4\int\limits_V\int\int z\, dv.$$

Pasando a las coordenadas cilíndricas $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\operatorname{sen}\varphi$, $z = z$, obtenemos

$$I = -4\int\limits_V\int\int z\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = -4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R}\rho\, d\rho \int\limits_0^{H} z\, dz = -2\pi R^2H^2.$$

Ejemplo 9. Hallar la integral superficial

$$I = \iint\limits_{\Sigma}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

por la superficie cerrada Σ, limitada por los planos:
$x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, si $\varphi = e^x \operatorname{sen} y + 1$.

Solución. La función dada es armónica, puesto que $\Delta\varphi = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y \equiv 0$. Por eso según la fórmula (18), obtendremos

$$I = \int\int\int_V |\operatorname{grad} \varphi|^2 \, dv.$$

Hallamos el módulo de gradiente de la función φ:

$$\operatorname{grad} \varphi = e^x \operatorname{sen} y \cdot \boldsymbol{i} + e^x \cos y \cdot \boldsymbol{j} \quad |\operatorname{grad} \varphi| = e^x.$$

La integral buscada es igual a

$$I = \int\int\int_V e^{2x} \, dv = \int_0^1 e^{2x} \, dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{8}(e^2 - 5).$$

252. Calcular la integral superficial

$$I = \iint_\Sigma \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\sigma$$

por la superficie cerrada Σ: $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ y = 0, \ y \geqslant 0\}$, si $\varphi = z^2$, $\psi = x^2 + y^2 - z^2$.

253. Calcular la integral superficial $I = \iint_\Sigma \left(\varphi \times \right.$ $\times \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big) d\sigma$, tomada por toda la superficie del cilindro cerrado Σ: $\{x^2 + y^2 = 1, \ z = 0, \ z = 1\}$, si $\varphi = 2x^2$, $\psi = x^2 + z^2$.

254. Calcular la integral superficial $I = \iint_\Sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma$, si $\varphi = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}}$, mientras que Σ es la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

255. Hallar la integral superficial $I = \iint_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma$, si $\varphi = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x + z$, y Σ es el elipsoide de tres ejes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

§ 22. POTENCIAL VECTORIAL

Dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

es solenoidal en el dominio G, es decir, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = 0$ en G.

Definición. El vector $\boldsymbol{b}(M) = P_1(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + Q_1(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R_1(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ que en el dominio G satisface la condición

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b}(M) = \boldsymbol{a}(M) \tag{1}$$

o en la forma de coordenadas

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial Q_1}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = R, \tag{2}$$

se llama el *potencial vectorial* del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$.

Para el campo solenoidal vectorial $\boldsymbol{a}(M)$ el potencial vectorial $\boldsymbol{b}(M)$ se determina no unívocamente: el vector $\boldsymbol{B}(M) = \boldsymbol{b}(M) + \operatorname{grad} f(M)$, donde $f(M)$ es la función escalar diferenciable arbitraria también satisface la condición (1), puesto que $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f(M)) \equiv \boldsymbol{0}$.

De tal modo, dos potenciales vectoriales del campo solenoidal $\boldsymbol{a}(M)$ se distinguen uno del otro por un gradiente del campo escalar. El hallazgo del potencial vectorial $\boldsymbol{b}(M)$ del campo solenoidal $\boldsymbol{a}(M)$ se reduce a la determinación de cierta solución particular del sistema (2) de las tres ecuaciones diferenciales en las derivadas parciales respecto a las tres funciones incógnitas $P_1(x, y, z)$, $Q_1(x, y, z)$, $R_1(x, y, z)$.

El potencial vectorial $\boldsymbol{b}(M)$ se puede construirla mediante el método siguiente. Usando la elección arbitraria del vector $\boldsymbol{b}(M)$, para simplificar la solución ponemos, por ejemplo, $P_1(x, y, z) \equiv 0$, es decir, vamos a buscar el vector $\boldsymbol{b}(M)$ en la forma de $\boldsymbol{b}(M) = Q_1(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + R_1(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$. En este caso el sistema de ecuaciones diferenciales (2) para hallar las funciones incógnitas $Q_1(x, y, z)$ y $R_1(x, y, z)$ obtiene la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} &= P, \\ \frac{\partial R_1}{\partial x} &= -Q, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} &= R. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

De la segunda y la tercera ecuaciones de este sistema hallamos

$$R_1(x, y, z) = -\int Q(x, y, z)\,dx + C_1(y, z),$$

$$Q_1(x, y, z) = \int R(x, y, z)\,dx + C_2(y, z),$$

donde $C_1(y, z)$ y $C_2(y, z)$ son todas funciones diferenciables de y y z. Para simplificar tomemos $C_2(y, z) \equiv 0$ y escojamos la función $C_1(y, z)$ de tal modo, que satisfaga también la primera ecuación del sistema (3). Para esto sustituimos en la primera ecuación las expresiones halladas para Q_1 y R_1:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx+\frac{\partial C_1}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx=P(x, y, z).$$

De aquí hallamos

$$\frac{\partial C_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx+\frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx+P(x, y, z).$$

Es muy fácil comprobar que el segundo miembro de esta ecuación no depende de x debido a que div $\boldsymbol{a}(M) = 0$ en G.

Integrando la última igualdad por y, hallamos

$$C_1(y, z)=\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx+P(x, y, z)\right]dy+C_3(z). \quad (4)$$

Suponiendo en (4) $C_3(z) \equiv 0$ y sustituyendo (4) en la expresión para $R_1(x, y, z)$, obtendremos la solución particular del sistema (3)

$$P_1 \equiv 0, \quad (5)$$

$$Q_1=\int R(x, y, z)\,dx, \quad (6)$$

$$R_1=\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x, y, z)\,dx+\frac{\partial}{\partial z}\int R(x, y, z)\,dx+\right.$$
$$\left.+P(x, y, z)\right]dy-\int Q(x, y, z)\,dx. \quad (7)$$

El vector $\boldsymbol{b}(M)$, cuyas coordenadas $P_1(x, y, z)$, $Q_1(x, y, z)$ y $R_1(x, y, z)$ se determinan por fórmulas (5), (6), (7) es la potencial vectorial, puesto que dicho vector satisface la condición rot $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

Ejemplo 1. Hallar el potencial vectorial $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(x, y, z)$ para el campo solenoidal prefijado por el vector

$$\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}.$$

Solución. Buscamos el potencial $\boldsymbol{b}$ en la forma:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(x, y, z) = Q_1(x, y, z)\boldsymbol{j} + R_1(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

donde $Q_1(x, y, z)$ y $R_1(x, y, z)$ hallamos mediante las fórmulas (7) y (8). Puesto que en el caso dado $P = 2y$, $Q = -z$, $R = 2x$, entonces obtendremos

$$Q_1(x, y, z)=\int 2x\,dx-x^2,$$

$$R_1(x, y, z)=\int z\,dx+\int 2y\,dy=xz+y^2,$$

Pues,

$$\boldsymbol{b}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{j} + (xz + y^2)\,\boldsymbol{k}.$$

Mediante la verificación directa se puede cerciorarse de que rot $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ lo que significa que este vector es el potencial vectorial del campo dado.

Observación. Debido a la elección arbitraria del vector $\boldsymbol{b}$ en vez de la condición $P_1(x, y, z) \equiv 0$ se puede exigir que $Q_1(x, y, z) \equiv 0$ ó $R_1(x, y, z) \equiv 0$. El sistema de ecuaciones (2) y las fórmulas (5), (6), (7) se cambiarán respectivamente.

Hallar los potenciales vectoriales de los campos solenoidales:

256. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.
257. $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j}$.
258. $\boldsymbol{a} = (e^x - e^y)\,\boldsymbol{k}$.
259. $\boldsymbol{a} = 6y^2\boldsymbol{i} + 6z\boldsymbol{j} + 6x\boldsymbol{k}$.
260. $\boldsymbol{a} = 3y^2\boldsymbol{i} - 3x^2\boldsymbol{j} - (y^2 + 2x)\,\boldsymbol{k}$.
261. $\boldsymbol{a} = ye^{x^2}\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} - (2xyze^{x^2} + z^2)\,\boldsymbol{k}$.

Si el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ es solenoidal en el dominio G, que es estelar (véase el § 19, el capítulo IV) con el centro en el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ (el campo $\boldsymbol{a}(M)$ puede no estar determinado en el punto O), entonces una de los potenciales vectoriales $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(M)$ se puede hallarla mediante la fórmula

$$\boldsymbol{b}(M) = \int_0^1 [\boldsymbol{a}(M^1),\ \boldsymbol{r}(M)]\,t\,dt, \tag{8}$$

z), donde $\mathbf{r}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es el radio vector del punto $M(x, y, z)$ y el punto $M'(tx, ty, tz)$ al variar el parámetro t desde 0 hasta 1, recorre el tramo OM.

Ejemplo 2. Aplicando la fórmula (8) hallar la potencial vectorial del campo solenoidal $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}$.

Solución. El campo vectorial dado está definido en todo el espacio tridimensional que es el dominio estelar con el centro en el origen de coordenadas, por tanto para hallar el potencial vectorial se puede utilizar la fórmula (8). En el punto $M'(tx, ty, tz)$ tenemos

$$\boldsymbol{a}(M') = 2ty\boldsymbol{i} - tz\boldsymbol{j} + 2tx\boldsymbol{k}.$$

Hallamos el producto vectorial

$$[\boldsymbol{a}(M'),\ \boldsymbol{r}(M)] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2ty & -tz & 2tx \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= [-(2xy + z^2)\,\boldsymbol{i} + (2x^2 - 2yz)\,\boldsymbol{j} + (2y^2 + xz)\,\boldsymbol{k}]\,t.$$

Mediante la fórmula (8) hallamos

$$\boldsymbol{b}(M) = \int_0^1 [-(2xy+z^2)\,\boldsymbol{i}+(2x^2-2yz)\,\boldsymbol{j}+(2y^2+xz)\,\boldsymbol{k}]\,t^2\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}(2xy+z^2)\,\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}(x^2+yz)\,\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}(2y^2+xz)\,\boldsymbol{k}.$$

Es muy fácil demostrar que rot $\boldsymbol{b}(M) = \boldsymbol{a}(M)$.

Observación. En los ejemplos 1 y 2 para el mismo campo solenoidal $\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}$ recibimos distintos potenciales vectoriales:

$$\boldsymbol{b}_1(M) = x^2\boldsymbol{j}+(xz+y^2)\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b}_2(M) = -\frac{1}{3}(2xy+z^2)\,\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}(x^2-yz)\,\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}(2y^2+xz).$$

Estas se distinguen uno del otro por el sumando que es igual al gradiente de cierto campo escalar $f(M)$. Dicho sumando juega papel de la constante arbitraria (cuando sobre ella actúa el rotor). El sumando está representado como el gradiente de cierta función escalar $f(M)$. Hallamos esta función para nuestro caso. Tenemos

$$\operatorname{grad} f(M) = \boldsymbol{b}_1(M) - \boldsymbol{b}_2(M) = \frac{1}{3}(2xy+z^2)\,\boldsymbol{i}+$$

$$+\frac{1}{3}(x^2+2yz)\,\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}(2xz+y^2)\,\boldsymbol{k}.$$

Para hallar el campo escalar $f(M)$ apliquemos la fórmula (3) del § 19, en la cual como el punto (x_0, y_0, z_0) tomemos el origan de coordenadas O (0, 0, 0). Entonces obtendremos

$$f(M) = \int_0^x 0\cdot dx + \int_0^y \frac{1}{3}x^2\,dy + \int_0^z \frac{1}{3}(2xz+y^2)\,dz + C =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2y+y^2z+z^2x) + C,$$

donde C es la constante arbitraria.

Ejemplo 3. Hallar el potencial vectorial $\boldsymbol{b}$ del campo magnético $\boldsymbol{H}$ engendrado por la carga eléctrica e que se mueve con la velocidad constante v.

Solución. Según la ley de Bio—Savart la intensidad del campo magnético es igual a

$$\boldsymbol{H}(M) = \frac{[e\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}]}{4\pi r^3}, \tag{9}$$

donde r es la distancia del punto M hasta la carga e.

Puesto que $\boldsymbol{H}$ es el vector solenoidal, es decir, div $\boldsymbol{H} = 0$, entonces para él existe la potencial vectorial $\boldsymbol{b}$ tal que $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$

o teniendo en cuenta la fórmula (9),

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \frac{[\boldsymbol{ev}, \boldsymbol{r}]}{4\pi r^3} = \frac{e}{4\pi} \frac{[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}]}{r^3}.$$

Reescribiremos la última fórmula en la forma siguiente

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\boldsymbol{ev}, \frac{x}{r^3} \boldsymbol{i} \right] + \left[\boldsymbol{ev}, \frac{y}{r^3} \boldsymbol{j} \right] + \left[\boldsymbol{ev}, \frac{z}{r^3} \boldsymbol{k} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\boldsymbol{i}, -\frac{e\boldsymbol{xv}}{r^3} \right] + \left[\boldsymbol{j}, -\frac{e\boldsymbol{yv}}{r^3} \right] + \left[\boldsymbol{k}, -\frac{e\boldsymbol{zv}}{r^3} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\boldsymbol{i}, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\boldsymbol{ev}}{r} \right) \right] + \left[\boldsymbol{j}, \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\boldsymbol{ev}}{r} \right) \right] + \left[\boldsymbol{k}, \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\boldsymbol{ev}}{r} \right) \right] \right\}.$$

Aplicando esta igualdad que es muy fácil verificar

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left[\boldsymbol{i}, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} \right] + \left[\boldsymbol{j}, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} \right] + \left[\boldsymbol{k}, \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z} \right],$$

obtendremos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{ev}}{r},$$

de donde

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\boldsymbol{ev}}{r}.$$

Aplicando la fórmula (8) hallar los potenciales de los campos solenoidales definidos en los dominios estelares:

262. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$.

263. $\boldsymbol{a} = 6x\boldsymbol{i} - 15y\boldsymbol{j} + 9z\boldsymbol{k}$.

264. $\boldsymbol{a} = 5x^2y\boldsymbol{i} - 10xyz\boldsymbol{k}$.

265. $\boldsymbol{a} = 2 \cos xz \cdot \boldsymbol{j}$.

266. $\boldsymbol{a} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$.

CAPÍTULO VI

COODINADAS CURVILINEAS; OPERACIONES *PRINCIPALES DEL ANALISIS VECTORIAL* EN LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS

§ 23. COORDENADAS CURVILINEAS

En muchos problemas es más cómodo definir la posición del punto M del espacio no con las tres coordenadas cartesianas (x, y, z), sino con los tres otros números (q_1, q_2, q_3) que más satisfacen el problema particular a estudiar.

Dado que a cada punto M le corresponde la terna definida de los números (q_1, q_2, b_3), e inversamente a cada tal terna de los números le corresponde el único punto M. En este caso las magnitudes q_1, q_2, q_3 las llaman *coordenadas curvilíneas del punto M.*

Superficies de coordenadas en el sistema de las coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 se llaman las superficies

$$q_1 = C_1, \tag{1}$$

$$q_2 = C_2, \tag{2}$$

$$q_3 = C_3, \tag{3}$$

en las cuales una de las coordenadas conserva un valor constante.

Las líneas de la intersección de dos superficies de coordenadas se llaman las *líneas de coordenadas.*

A lo largo de la línea de intersección de las superficies de coordenadas (2) y (3) las coordenadas q_2 y q_3 conservan los valores constantes; se cambia sólo la coordenada q_1. Por analogía en las líneas de intersección de las superficies (1) y (3) ó (1) y (2) se cambian respectivamente solamente q_2 y q_3.

Trazamos los vectores de unidad e_1, e_2, e_3 dirigidos por tangentes a las líneas de coordenadas (q_1), (q_2), (q_3) en el punto M en dirección del incremento de las variables q_1, q_2, q_3 respectivamente (fig. 37). *Conviene tomar los versores* e_1, e_2, e_3 *siempre en tal orden* para que su conjunto forme la terna derecha.

Señalemos la diferencia radical entre las coordenadas curvilíneas y las cartesianas. En el sistema de coordenadas cartesianas los vectores e_1, e_2, e_3 son constantes para todos los puntos del espacio *y son iguales a* i, j, k *respectivamente. En cualquier otro sistema* ellos cambian sus direcciones pasando de un punto M al otro.

Las coordenadas cilíndricas y esféricas sirven de ejemplo de las coordenadas curvilíneas. Estudiemos las coordenadas cilíndricas y esféricas.

1°. Coordenadas cilíndricas. En las coordenadas cilíndricas la posición del punto M del espacio se determina con las tres coordenadas:

$$\begin{aligned} q_1 &= \rho, \quad 0 \leqslant \rho < +\infty, \\ q_2 &= \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ q_3 &= z, \quad -\infty < z < +\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Las superficies de coordenadas son:

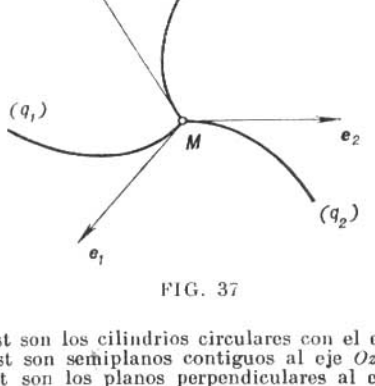


FIG. 37

$\rho = \text{const}$ son los cilindrios circulares con el eje Oz;
$\varphi = \text{const}$ son semiplanos contiguos al eje Oz:
$z = \text{const}$ son los planos perpendiculares al eje Oz.

Las líneas de coordenadas son: las líneas (ρ), rayos perpendiculares al eje Oz y que tienen el origen en este eje; las líneas (φ) son las circunferencias con el centro en el eje Oz que se encuentran en los planos perpendiculares a este eje; las líneas (z) son las rectas paralelas al eje Oz (fig. 38).

La conexión de las coordenadas cartasianas con las cilíndricas se determina por las fórmulas

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{5}$$

2°. Coordenadas esféricas. En las coordenadas esféricas la posición del punto M del espacio se determina por las coordenadas siguientes:

$$\begin{aligned} q_1 &= r, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \\ q_2 &= \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ q_3 &= \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{aligned} \tag{6}$$

Las superficies de coordenadas son (fig. 39):
r = const son las esferas con el centro en el punto O;

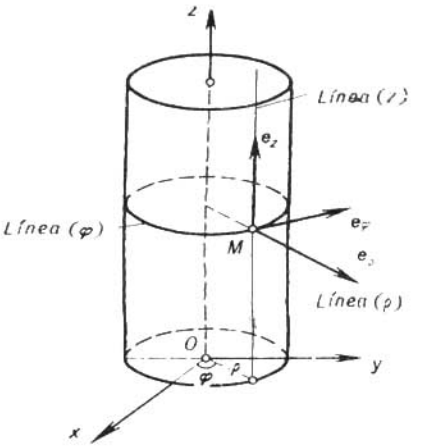


FIG. 38

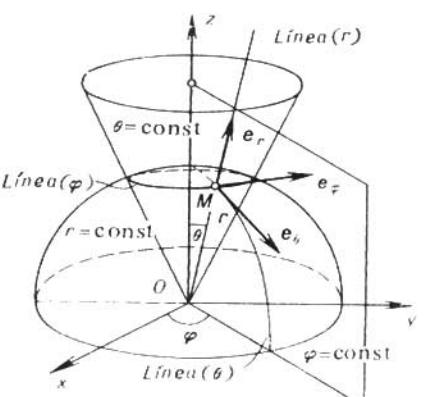


FIG. 39

θ = const son los semiconos con el eje Oz;
φ = const son los semiplanos contiguos al eje Oz.
Las líneas de coordenadas son las:

líneas (r), los rayos que salen del punto O;
líneas (θ), los meridianos en la esfera;
líneas (φ), las paralelas en la esfera.

La *conexión* de las coordenadas cartesianas con las esféricas se determina mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, \\ y &= r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \tag{7}$$

El sistema de las coordenadas curvilíneas se llama *ortogonal*, si en cada punto M los versores e_1, e_2, e_3 son ortogonales a pares. *Las líneas de coordenadas y las superficies de coordenadas en tal* sistema serán ortogonales también. Los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas sirven de ejemplo de los sistemas de coordenadas ortogonales curvilíneas. Más adelante vamos a examinar sólo los sistemas ortogonales de coordenadas.

Dado $r = r(q_1, q_2, q_3)$ que es el radio vector del punto M. Entonces

$$dr = H_1\, dq_1 e_1 + H_2\, dq_2 e_2 + H_3\, dq_3 e_3. \tag{8}$$

Aquí

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

son los coeficientes Lamé del sistema dado de las coordenadas curvilíneas.

En las coordenadas cilíndricas

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z$$

en virtud de (5) tenemos

$$H_1 = H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \rho,$$

$$H_3 = H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

En las coordenadas esféricas

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi$$

en virtud (7) tenemos

$$H_1 = H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_2 = H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r,$$

$$H_3 = H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \operatorname{sen} \theta.$$

Los valores

$$dl_i = H_i dq_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

que figuran en la fórmula (8), son las diferenciales de longitudes de los arcos de las líneas de coordenadas. Esta idea permite en muchos casos calcular más fácilmente los coeficientes Lamé. Pues en el caso de las coordenadas cilíndricas (4) (véase la fig. 38) las diferenciales de longitudes de los arcos de las líneas de coordenadas (ρ), (φ), (z) serán

$$d(\rho) = 1 \cdot d\rho, \quad \text{de donde } H_1 = 1;$$
$$d(\varphi) = \rho \cdot d\varphi, \quad \text{de donde } H_2 = \rho;$$
$$d(z) = 1 \cdot dz, \quad \text{de donde } H_3 = 1.$$

Igualmente muy fácilmente se puede obtener las expresiones para los coeficientes Lamé en el caso de las coordenadas esféricas (6).

§ 24. OPERACIONES PRINCIPALES DEL ANALISIS VECTORIAL EN LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS

1°. Ecuaciones diferenciales de las líneas vectoriales. Sea que tenemos el campo del vector

$$\boldsymbol{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_3.$$

Las ecuaciones de las líneas vectoriales en las coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 tienen la fórmula de

$$\frac{H_1\, dq_1}{a_1(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_2\, dq_2}{a_2(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_3\, dq_3}{a_3(q_1, q_2, q_3)}.$$

Particularmente, en las coordenadas cilíndricas ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\frac{d\rho}{a_1(\rho, \varphi, z)} = \frac{\rho\, d\varphi}{a_2(\rho, \varphi, z)} = \frac{dz}{a_3(\rho, \varphi, z)}; \qquad (1)$$

en las coordenadas esféricas ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$):

$$\frac{dr}{a_1(r, \theta, \varphi)} = \frac{r\, d\theta}{a_2(r, \theta, \varphi)} = \frac{r \operatorname{sen} \theta\, d\varphi}{a_3(r, \theta, \varphi)}.$$

Ejemplo 1. El campo vectorial es dado en las coordenadas cilíndricas:

$$\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{e}_\rho + \varphi \boldsymbol{e}_\varphi.$$

Hallar las líneas vectoriales de este campo.

Solución. Según la condición del problema $a_1 = 1$, $a_2 = \varphi$, $a_3 = 0$. En virtud de la fórmula (1) tenemos

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{\rho\, d\varphi}{\varphi} = \frac{dz}{0}.$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned} z &= C_1, \\ \rho &= C_2\varphi; \end{aligned}\right\}$$

estos son los espirales de Arquímedes que se encuentran en los planos paralelos al plano xOy.

2°. *Gradiente en las coordenadas ortogonales.* Sea que tenemos el campo escalar

$$u = u\,(q_1,\ q_2,\ q_3).$$

Entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\,\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\,\boldsymbol{e}_3.$$

En particular, para las coordenadas cilíndricas ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z; \qquad (2)$$

en las coordenadas esféricas ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$):

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi. \qquad (3)$$

Ejemplo 2. Calcular el gradiente del campo escalar dado en las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z): $u = \rho + z\cos\varphi$.

Solución. Aplicando la fórmula (2), obtenemos

$$\operatorname{grad} u = 1\cdot\boldsymbol{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\,z\operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi + \cos\varphi\cdot\boldsymbol{e}_z.$$

Ejemplo 3. Hallar el gradiente del campo escalar dado en las coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$u = r + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi.$$

Solución. Aplicando la fórmula (3), obtendremos

$$\operatorname{grad} u = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{1}{r} - \cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}\,\boldsymbol{e}_\varphi.$$

3°. *Rotor en las coordenadas ortogonales.* Sea

$$\boldsymbol{a} = a_1\,(q_1,\ q_2,\ q_3)\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,(q_1,\ q_2,\ q_3)\,\boldsymbol{e}_2 + a_3\,(q_1,\ q_2,\ q_3)\,\boldsymbol{e}_3.$$

Entonces

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{H_2H_3}\,\boldsymbol{e}_1 & \dfrac{1}{H_1H_3}\,\boldsymbol{e}_2 & \dfrac{1}{H_1H_2}\,\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1H_1 & a_2H_2 & a_3H_3 \end{vmatrix}.$$

En particular, en las coordenadas cilíndricas ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}; \tag{4}$$

en las coordenadas esféricas ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta}\boldsymbol{e}_r & \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\boldsymbol{e}_\theta & \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & r a_2 & r \operatorname{sen} \theta \cdot a_3 \end{vmatrix}. \tag{4'}$$

Ejemplo 4. Calcular el rotor del campo vectorial dado en las coordenadas cilíndricas

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{sen} \varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho + \frac{\cos \varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi - \rho z \boldsymbol{e}_z.$$

Solución. Utilizando la fórmula (4), obtendremos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & -\rho z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho (0 - 0) - \boldsymbol{e}_\varphi (-z - 0) + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_z (0 - \cos \varphi) = z\boldsymbol{e}_\varphi - \frac{\cos \varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_z.$$

4°. Divergencia en las coordenadas ortogonales. Sea dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = a_1 (q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_1 + a_2 (q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_2 + a_3 (q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_3.$$

Entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right].$$

En particular, en las coordenadas cilíndricas ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho a_1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z};$$

En las coordenadas esféricas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial (\operatorname{sen} \theta \cdot a_2)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial a_3}{\partial \varphi}. \tag{5}$$

Ejemplo 5. Mostrar que el campo del vector

$$\boldsymbol{a} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

es solenoidal.

Solución. Aplicando la fórmula 5), obtendremos

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{2\cos\theta}{r^3}\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\right) + 0 =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(-\frac{2\cos\theta}{r^2}\right) + \frac{1}{r^4\operatorname{sen}\theta}\,2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

en todas las partes, donde $r \neq 0$. Esto significa que el campo del vector $\boldsymbol{a}$ es solenoidal en todas partes, menos el punto $r = 0$.

267. Hallar las ecuaciones de las líneas vectoriales de los siguientes campos

a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_z$;

b) $\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{e}_\rho + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi + z\boldsymbol{e}_z$;

c) $\boldsymbol{a} = \frac{2\alpha\cos\theta}{r^3}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{\alpha\operatorname{sen}\theta}{r^3}\,\boldsymbol{e}_\theta\alpha = \text{const}$.

Hallar los gradientes de los campos escalares:

a) En las coordenadas cilíndricas

268. $u = \rho^2 + 2\rho\cos\varphi - e^z\operatorname{sen}\varphi$.

269. $u = \rho\cos\varphi + z\operatorname{sen}^2\varphi - 3\rho$.

b) En las coordenadas esféricas

270. $u = r^2\cos\theta$.

271. $u = 3r^2\operatorname{sen}\theta + e^r\cos\varphi - r$.

272. $u = \mu\frac{\cos\theta}{r^2}$, $\mu = \text{const}$.

Calcular la divergencia de los vectores:

a) En las coordenadas cilíndricas

273. $\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + e^\varphi\cos z\boldsymbol{e}_z$.

274. $\boldsymbol{a} = \varphi\operatorname{arctg}\rho\boldsymbol{e}_\rho + 2\boldsymbol{e}_\varphi - z^2e^z\boldsymbol{e}_z$.

b) En las coordenadas esféricas

275. $\boldsymbol{a} = r^2\boldsymbol{e}_r - 2\cos^2\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\varphi}{r^2+1}\,\boldsymbol{e}_\varphi$.

Calcular el rotor de los campos vectoriales siguientes:

276. $\boldsymbol{a} = (2r + \alpha\cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_r - \alpha\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi$, $\alpha = \text{const}$.

277. $\boldsymbol{a} = r^2\boldsymbol{e}_r + 2\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta - \varphi\boldsymbol{e}_\varphi$.

278. $\boldsymbol{a} = \cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi + \rho^2\boldsymbol{e}_z$.

279. Mostrar que el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta$$

es potencial.

280. Mostrar que el campo vectorial

$$\boldsymbol{a} = f(r)\,\boldsymbol{e}_r,$$

donde f es la función diferenciable cualquiera, es potencial.

5°. Cálculo del flujo en las coordenadas curvilíneas. Sea S una parte de la superficie de coordenadas $q_1 = C$, donde $C = \text{const}$, limitada con las líneas de coordenadas

$$q_2 = \alpha_1, \quad q_2 = \alpha_2 \qquad (\alpha_1 < \alpha_2);$$
$$q_3 = \beta_1, \quad q_3 = \beta_2 \qquad (\beta_1 < \beta_2).$$

Entonces el flujo del vector

$$\boldsymbol{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_3$$

a través de la superficie S en dirección del vector $\boldsymbol{e}_1$ se calcula según la fórmula

$$\Pi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} a_1(C, q_2, q_3)\,H_2(C, q_2, q_3)\,H_3 \times \times (C, q_2, q_3)\,dq_3\,dq_2. \quad (9)$$

Análogamente, se calcula el flujo a través de la parte de la superficie $q_2 = C$ o a través de la parte de la superficie $q_3 = C$, donde $C = \text{const}$.

Ejemplo 6. Calcular el flujo del campo vectorial dado en las coordenadas cilíndricas:

$$\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_\varphi,$$

a través de la superficie exterior de la superficie lateral del cilindro $\rho = 1$ limitado por los planos $z = 0$, $z = 1$.

Solución. El cilindro es la superficie de coordenadas $\rho = C = \text{const}$, y por lo tanto el flujo buscado es:

$$\Pi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 C^2\,dz\,d\varphi = 2\pi C^2,$$

de donde para la superficie $\rho = 1$ obtenemos $\Pi = 2\pi$.

Ejemplo 7. Hallar el flujo del campo vectorial dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = r^2\theta \boldsymbol{e}_r + re^2\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

a través de la parte exterior de la semiesfera superior S del radio R con el centro en el origen de coordenadas.

Solución. La semiesfera S es la parte de la superficie de coordenadas $r = \text{const}$, precisamente $r = R$. En la superficie S tenemos

$$q_1 = r = R; \quad q_2 = \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$q_3 = \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Teniendo en cuenta que en las coordenadas esféricas

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r \operatorname{sen} \theta.$$

Mediante la fórmula (6) hallamos

$$\Pi = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} R^4 \theta \operatorname{sen} \theta \, d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta = 2\pi R^4.$$

Calcular el flujo del campo vectorial dado en las coordenadas cilíndricas a través de la superficie dada S.

281. $\boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{e}_\rho - \cos \varphi \boldsymbol{e}_\varphi + z\boldsymbol{e}_z$,

S es la superficie cerrada formada por el cilindro $\rho = 2$, y con los planos $z = 0$ y $z = 2$.

282. $\boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{e}_\rho + \rho\varphi \boldsymbol{e}_\varphi - 2z\boldsymbol{e}_z$,

S es la superficie cerrada formada por el cilindro $\rho = 1$, los semiplanos $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi/2$ y los planos $z = -1$, $z = 1$.

283. Hallar el flujo del campo vectorial dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

a través de la esfera del radio R y con el centro en el origen de coordenadas.

284. Hallar el flujo del vector dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r + r \operatorname{sen} \theta \boldsymbol{e}_\theta - 3r\varphi \operatorname{sen} \theta \boldsymbol{e}_\varphi$$

a través de la semiesfera superior del radio R.

285. Hallar el flujo del vector dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = r^2 \boldsymbol{e}_r + R^2 \cos \varphi \boldsymbol{e}_\varphi$$

a través de la esfera $r = R$.

286. Hallar el flujo del vector dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r - r \operatorname{sen} \theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi,$$

a través del semicírculo del radio R dispuesto en el semiplano $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (el flujo se tomó en dirección del vector $\boldsymbol{e}_\varphi$).

287. Hallar el flujo del vector dado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cdot \boldsymbol{e}_0 + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \boldsymbol{e}_\varphi,$$

a través del lado exterior de la parte del semicono $\sqrt{3}\, z^2 = x^2 + y^2$ limitada de arriba por el plano $z = \sqrt{3}$ $(0 \leqslant z \leqslant \sqrt{3})$.

6°. Hallazgo del potencial en las coordenadas curvilíneas. Sea en las coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 dado el campo vectorial $\boldsymbol{a}(M) = a_1(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\,\boldsymbol{e}_3$ que es potencial en algún dominio Ω del cambio de variables q_1, q_2, q_3, es decir, rot $\boldsymbol{a} = 0$ en Ω.

Para hallar el potencial $u = u(q_1, q_2, q_3)$ de este campo la igualdad $\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$ escriben en la forma de

$$a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3.$$

De aquí sigue que

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = a_1 H_1, \quad \frac{\partial u}{\partial q_2} = a_2 H_2, \quad \frac{\partial u}{\partial q_3} = a_3 H_3. \tag{7}$$

Esto es el sistema de las ecuaciones diferenciales de las derivadas parciales, integrando el cual hallamos el potencial buscado $u = u(q_1, q_2, q_3) + C$, donde C es una constante arbitraria.

El sistema de las ecuaciones diferenciales (7) se resuelve del mismo modo como para hallar la potencial en las coordenadas cartesianas.

El sistema de las ecuaciones diferenciales (7) tiene la forma

1) en las coordenadas cilíndricas $(q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z)$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = a_\rho, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \rho a_\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_z; \tag{7'}$$

2) en las coordenadas esféricas $(q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \varphi)$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a_r, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = r a_\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r \operatorname{sen} \theta \cdot a_\varphi. \tag{7''}$$

Ejemplo 8. Hallar el potencial del campo vectorial prefijado en las coordenadas cilíndricas:

$$a = \left(\frac{\operatorname{arctg} z}{\rho} + \cos\varphi\right) e_\rho - \operatorname{sen}\varphi\, e_\varphi + \frac{\ln\rho}{1+z^2} e_z.$$

Solución. Según la fórmula (4) hallamos

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} e_\rho & e_\varphi & \frac{1}{\rho} e_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\operatorname{arctg} z}{\rho} + \cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi & \frac{\ln\rho}{1+z^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\rho > 0),$$

es decir, el campo dado es de potencial. El potencial buscado $u = u(\rho, \varphi, z)$ es la solución del siguiente sistema de las ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial\rho} &= \frac{\operatorname{arctg} z}{\rho} + \cos\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial\varphi} &= -\rho\operatorname{sen}\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\ln\rho}{1+z^2}. \end{aligned}\right\}$$

De la primera ecuación mediante la integración por ρ hallamos que

$$u = \ln\rho \cdot \operatorname{arctg} z + \rho\cos\varphi + C(\varphi, z). \tag{8}$$

Diferenciando (8) respecto de φ, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = -\rho\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial C}{\partial\varphi},$$

y puesto que $\frac{\partial u}{\partial\varphi} = -\rho\operatorname{sen}\varphi$, entonces $\frac{\partial C}{\partial\varphi} \equiv 0$, es decir, $C = C_1(z)$. De tal modo

$$u = \ln\rho \cdot \operatorname{arctg} z + \rho\cos\varphi + C_1(z).$$

De aquí

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\ln\rho}{1+z^2} + C_1'(z)$$

En virtud de la tercera ecuación del sistema tenemos

$$\frac{\ln\rho}{1+z^2} = \frac{\ln\rho}{1+z^2} + C_1'(z),$$

o sea, $C_1'(z) \equiv 0$ de donde $C_1(z) = C = \text{const}$. Y el potencial del campo dado

$$u(\rho, \varphi, z) = \ln\rho \cdot \operatorname{arctg} z + \rho\cos\varphi + C.$$

En los problemas siguientes es necesario convencerse que los campos vectoriales prefijados en las coordenadas cilíndricas con potenciales y hallar sus potenciales.

288. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_z$.

289. $\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + \frac{\varphi}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\varphi + z\,\boldsymbol{e}_z$.

290. $\boldsymbol{a} = \varphi z\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_\varphi + \rho\varphi\boldsymbol{e}_z$.

291. $\boldsymbol{a} = e^\rho \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\,e^\rho \cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + 2z\boldsymbol{e}_z$.

292. $\boldsymbol{a} = \varphi\cos z\boldsymbol{e}_\rho + \cos z\boldsymbol{e}_\varphi - \rho\varphi \operatorname{sen} z\boldsymbol{e}_z$.

Ejemplo 9. Hallar el potencial del campo vectorial prefijado en las coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\,e^{\theta\varphi}\boldsymbol{e}_r + \frac{\theta \ln r}{r \operatorname{sen}\theta}\,e^{\theta\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\ln r}{r}\,\varphi e^{\theta\varphi}\boldsymbol{e}_\theta.$$

Solución. Según la fórmula (4') obtenemos que

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\operatorname{sen}\theta\cdot\boldsymbol{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ \dfrac{1}{r}\,e^{\theta\varphi} & \varphi \ln r\cdot e^{\theta\varphi} & \theta \ln r\cdot e^{\theta\varphi} \end{vmatrix} = 0.$$

El campo dado es potencial en el dominio donde $r > 0$, $\theta \neq n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$.

Para hallar el potencial $u = u(r, \theta, \varphi)$ el sistema de ecuaciones diferenciales (7) tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\,e^{\theta\varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial\theta} &= \varphi e^{\theta\varphi} \ln r, \\ \frac{\partial u}{\partial\varphi} &= \theta\cdot e^{\theta\varphi} \ln r. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Al integrar la primera ecuación del sistema (9), obtenemos

$$u = e^{\theta\varphi} \ln r + C(\varphi, \theta). \tag{10}$$

Diferenciando (10) por θ y teniendo en cuenta la segunda ecuación del sistema, obtendremos

$$\varphi e^{\theta\varphi} \ln r = \varphi e^{\theta\varphi} \ln r + \frac{\partial C}{\partial\theta},$$

o sea, $\frac{\partial C}{\partial\theta} = 0$, de donde $C(\varphi, \theta) \equiv C_1(\varphi)$ y por tanto

$$u = e^{\theta\varphi} \ln r + C_1(\varphi). \tag{11}$$

Diferenciando (11) por φ y teniendo en cuenta la tercera ecuación del sistema (9) hallamos

$$0e^{0\varphi} \ln r = 0e^{0\varphi} \ln r + C_1'(\varphi)$$

o $C_1'(\varphi) = 0$, de donde $C_1(\varphi) = C = \text{const}$. La potencial buscado es igual a

$$u(r, 0, \varphi) = e^{0\varphi} \ln r + C.$$

Demostrar la potencialidad de los siguientes campos vectoriales prefijados en las coordenadas esféricas hallar sus potenciales.

293. $\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_0$.

294. $\boldsymbol{a} = 2r\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{1}{r} \boldsymbol{e}_\theta$.

295. $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{2} \varphi^2 \cdot \boldsymbol{e}_r + \dfrac{\varphi}{\operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{0}{r} \boldsymbol{e}_\theta$.

296. $\boldsymbol{a} = \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \cdot \boldsymbol{e}_r + \cos \varphi \cos \theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta - \operatorname{sen} \varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$.

297. $\boldsymbol{a} = e^r \operatorname{sen} \theta \cdot \boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r} e^r \cos \theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + \dfrac{2\varphi}{(1 + \varphi^2) r \operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_\varphi$.

7°. *Cálculo de la integral lineal y de la circulación del campo vectorial en las coordenadas curvilíneas.* Dado que el campo vectorial

$$\boldsymbol{a}(M) = a_1(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_3$$

es definido y continuo en el dominio Ω de la variación de las coordenadas ortogonales curvilíneas q_1, q_2, q_3.

La diferencial $d\boldsymbol{r}$ del radio vector $\boldsymbol{r}$ del punto cualquiera $M(q_1, q_2, q_3) \in \Omega$, como es conocido, es igual (véase el § 23, (8))

$$d\boldsymbol{r} = H_1\, dq_1 \boldsymbol{e}_1 + H_2\, dq_2 \boldsymbol{e}_2 + H_3\, dq_3 \boldsymbol{e}_3.$$

Por eso la integral lineal del vector $\boldsymbol{a}(M)$ por la curva orientada plana o parcialmente plana $L \subset \Omega$ será igual a

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_L a_1 H_1\, dq_1 + a_2 H_2\, dq_2 + a_3 H_3\, dq_3. \tag{12}$$

En particular, para las coordenadas cilíndricas $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ obtendremos

$$\boldsymbol{a} = a_\rho(\rho, \varphi, z)\, \boldsymbol{e}_\rho + a_\varphi(\rho, \varphi, z)\, \boldsymbol{e}_\varphi + a_z(\rho, \varphi, z)\, \boldsymbol{e}_z,$$

$$d\boldsymbol{r} = d\rho \boldsymbol{e}_\rho + \rho\, d\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + dz \boldsymbol{e}_z,$$

por eso

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_L a_\rho\, d\rho + a_\varphi \rho\, d\varphi + a_z\, dz; \tag{13}$$

para las coordenadas esféricas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ obtendremos

$$\boldsymbol{a} = a_r(r, \theta, \varphi)\, \boldsymbol{e}_r + a_\theta(r, \theta, \varphi)\, \boldsymbol{e}_\theta + a_\varphi(r, \theta, \varphi)\, \boldsymbol{e}_\varphi.$$

$$d\boldsymbol{r} = dr \cdot \boldsymbol{e}_r + r\, d\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + r \operatorname{sen} \theta\, d\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi,$$

y, por consiguiente,

$$\int_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_L a_r\, dr + ra_\theta\, d\theta + ra_\varphi \operatorname{sen}\theta\, d\varphi. \qquad (14)$$

La circulación C del campo vectorial $\boldsymbol{a}(M)$ en las coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 se calcula en el caso general mediante la fórmula (12), y en el caso de las coordenadas cilíndricas o esféricas ella se calcula por medio de la fórmula (13) ó (14) respectivamente.

Ejemplo 10. *Calcular la integral lineal en el campo vectorial* prefijado en las coordenadas cilíndricas

$$\boldsymbol{a} = 4\rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho + ze^\rho \cdot \boldsymbol{e}_\varphi + (\rho + \varphi)\cdot \boldsymbol{e}_z,$$

a lo largo de la recta

$$L: \begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

del punto $O\left(0,\ \dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$ hasta el punto $A\left(1,\ \dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$.

Solución. En el ejemplo dado

$$a_\rho = 4\rho \operatorname{sen}\varphi,\quad a_\varphi = ze^\rho,\quad a_z = \rho + \varphi.$$

Según la fórmula (13) la integral lineal buscada

$$\int_{OA} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_{OA} 4\rho \operatorname{sen}\varphi\, d\rho + \rho z e^\rho\, d\varphi + (\rho + \varphi)\, dz.$$

En la recta L tenemos:

$$\varphi = \frac{\pi}{4},\quad d\varphi = 0;\quad z = 0,\quad dz = 0;\quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

Por tanto

$$\int_{OA} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int_{OA} 2\sqrt{2}\,\rho\, d\rho = \sqrt{2}\int_0^1 2\rho\, d\rho = \sqrt{2}.$$

Ejemplo 11. Calcular la integral lineal en el campo vectorial prefijado en las coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{a} = e^r \operatorname{sen}\theta \cdot \boldsymbol{e}_r + 3\theta^2 \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\theta + r\varphi\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$$

a lo largo de la línea

$$L: \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

en dirección del punto $M_0\left(1, 0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ hasta el punto $M_1\left(1, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (fig. 40).

Solución. Línea L es el arco de la circunferencia con el centro en el origen de coordenadas y el radio $R = 1$ que se encuentra en el plano yOz. Las coordenadas del vector dado son iguales a

$$a_r = e^r \operatorname{sen} \theta, \quad a_\theta = 3\theta^2 \operatorname{sen} \varphi, \quad a_\varphi = r\varphi\theta.$$

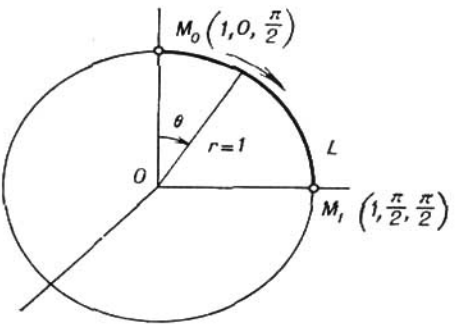


FIG. 40

En virtud de la fórmula (14) la integral lineal tiene la forma

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_L e^r \operatorname{sen} \theta \, dr + 3\theta^2 r \operatorname{sen} \varphi \, d\theta + r^2 \varphi\theta \operatorname{sen} \theta \, d\varphi.$$

Teniendo en cuenta que en la línea L se cumplen las condiciones:

$$r = 1, \quad dr = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad d\varphi = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

obtendremos

$$\int_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_L 3\theta^2 \, d\theta = \int_0^{\pi/2} 3\theta^2 \, d\theta = \frac{\pi^3}{8}.$$

Ejemplo 12. Calcular la circulación del campo vectorial prefijado en las coordenadas cilíndricas

$$\boldsymbol{a} = \rho \operatorname{sen} \varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho + \rho z \cdot \boldsymbol{e}_\varphi + \rho^3 \cdot \boldsymbol{e}_z,$$

a lo largo de la curva

$$L: \begin{cases} \rho = \operatorname{sen} \varphi, \\ z = 0, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Solución. Las coordenadas del vector dado

$$a_\rho = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad a_\varphi = \rho z, \quad a_z = \rho^3.$$

El contorno L es una curva cerrada que se encuentra en el plano $z = 0$ (fig. 41).

Sustituyendo las coordenadas del vector dado en la fórmula (13) obtendremos

$$C = \oint_L \rho \operatorname{sen} \varphi \, d\rho + \rho^2 z \, d\varphi + \rho^3 \, dz.$$

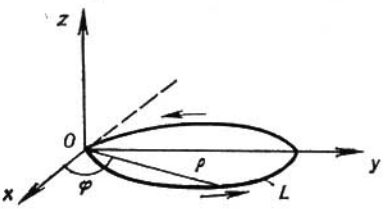


FIG. 41

En la curva L tenemos:

$z = 0$, $dz = 0$; $\rho = \operatorname{sen} \varphi$, $d\rho = \cos \varphi \, d\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Por eso la circulación buscada será igual a:

$$C = \oint_L \rho \operatorname{sen} \varphi \, d\rho = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 0.$$

Ejemplo 13. Calcular la circulación del vector prefijado en la coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r + (R + r) \operatorname{sen} \theta \cdot \boldsymbol{e}_{\varphi},$$

por la circunferencia

$$L: \begin{cases} r = R, \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

en dirección del incremento del ángulo φ.

Solución. En el ejemplo dado

$$a_r = r, \; a_\theta = 0, \; a_\varphi = (R + r) \operatorname{sen} \theta.$$

Según la fórmula (14) la circulación buscada es igual a

$$C = \oint_L r \, dr + (R + r) \operatorname{sen} \theta r \operatorname{sen} \theta \, d\varphi = \oint_L r \, dr + r (R + r) \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi.$$

En la circunferencia L dada, cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas, tenemos

$$r = R, \quad dr = 0; \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \qquad 0 \leqslant \varphi < \pi,$$

y, por consiguiente,

$$C = 2R^2 \oint_L d\varphi = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2.$$

Calcular la integral lineal por las líneas dadas L en los campos vectoriales prefijados en las coordenadas cilíndricas.

298. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{e}_\rho + \rho\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi + \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_z$,
L es el segmento de la recta: $\{\rho = a, \varphi = 0, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

299. $\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + 2\rho\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + z\boldsymbol{e}_z$,
L es la semiesfera: $\{\rho = 1, z = 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$.

300. $\boldsymbol{a} = e^\rho \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho + \rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi + \rho\boldsymbol{e}_z$,
L es la espira de la línea helicoidal: $\{\rho = R, z = \varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$.

Calcular la integral lineal por la línea dada L en los campos vectoriales prefijados en las coordenadas esféricas.

301. $\boldsymbol{a} = e^r \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_r + 20 \cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + \varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$,
L es la semiesfera: $\{r = 1, \varphi = 0, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$.

302. $\boldsymbol{a} = 4r^3 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{e}_r + \theta \cdot \varphi \cdot \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + \cos^2\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$, L es el segmento de la recta: $\left\{\varphi = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant 1\right\}$.

303. $\boldsymbol{a} = \operatorname{sen}^2\theta \cdot \boldsymbol{e}_r + \operatorname{sen}\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta + r\varphi\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$, L es el segmento de la recta: $\left\{\varphi = \frac{\pi}{2}, r = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

Calcular por los contornos dados la circulación de los campos vectoriales prefijados en las coordenadas cilíndricas.

304. $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{e}_\rho + \rho z\boldsymbol{e}_\varphi + \rho\boldsymbol{e}_z$,
L es la circunferencia: $\{\rho = 1, z = 0\}$.

305. $\boldsymbol{a} = \rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho - \rho^2 z\boldsymbol{e}_\varphi + \rho^2\boldsymbol{e}_z$,
L es la circunferencia: $\{\rho = R, z = R\}$.

306. $\boldsymbol{a} = z \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_\rho + \rho\boldsymbol{e}_\varphi + \varphi^2\boldsymbol{e}_z$,
L es el bucle: $\{\rho = \operatorname{sen}\varphi, z = 1\}$.

Calcular por los contornos dados L la circulación de los vectores prefijados en las coordenadas esféricas.

307. $\boldsymbol{a} = r\theta\boldsymbol{e}_r + r \operatorname{sen}\theta \cdot \boldsymbol{e}_\varphi$,
L es la circunferencia: $\left\{r = 1, \theta = \frac{\pi}{4}\right\}$.

308. $\boldsymbol{a} = r \operatorname{sen} \theta \cdot \boldsymbol{e}_r + 0 e^{\theta} \boldsymbol{e}_{\theta}$,

L es el bucle: $\left\{r = \operatorname{sen} \varphi,\ \theta = \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\right\}$.

309. $\boldsymbol{a} = r\varphi\theta \cdot \boldsymbol{e}_{\varphi}$,

L es el contorno limitado por la semiesfera $\left\{r = R,\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\right\}$ y por su diámetro vertical; $\left\{\varphi = \frac{\pi}{4},\ \theta = 0\right\}$.

§ 25. OPERADOR DE LAPLACE EN LAS COORDENADAS ORTOGONALES

Si $u = u(q_1, q_2, q_3)$ es la función escalar, entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \boldsymbol{e}_3. \qquad (1)$$

Si

$$\boldsymbol{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\, \boldsymbol{e}_3,$$

entonces

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right]. \qquad (2)$$

Aplicando las fórmulas (1) y (2) para el operador de Laplace Δu obtenemos la expresión siguiente:

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

En las coordenadas cilíndricas

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

En las coordenadas esféricas

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Ejemplo. Hallar todas las resoluciones de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, que dependen sólo de la distancia r.

Solución. Al escribir la ecuación de Laplace en las coordenadas esféricas y al tomar en consideración la simetría esférica de la solución (que no debe ser función de θ y de φ), obtendremos

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \qquad (u = u(r)).$$

De aquí

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = C_1,$$

de modo que

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

donde C_1, C_2 son constantes.

310. Dado el campo escalar $u = u(M)$ en las coordenadas cilíndricas

$$u(\rho, \varphi, z) = \rho^2 \varphi + z^2 \varphi^3 - \rho \varphi z.$$

Hallar Δu.

311. Dado el campo escalar $u = u(M)$ en las coordenadas esféricas

$$u(r, \theta, \varphi) = r^2 \varphi \theta + r^3 \varphi^2 + \varphi + \theta^2.$$

Hallar Δu.

312. ¿Son armónicas las funciones siguientes?

1) $u = \rho^2 \cos 2\varphi$,

2) $u = r \cos 2\theta$.

313. Hallar todas las funciones armónicas posibles;

1) que dependen sólo de θ,

2) que dependen sólo de φ,

(en el sistema de coordenadas esférico).

314. Hallar todas las resoluciones de la ecuación de Poisson

$$\Delta u = r^{n-1}$$

en el sistema de coordenadas esférico, si $u = u(r)$.

RESPUESTAS

1. a) Semirrecta $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=-z \end{matrix}\right\} y \geqslant 0,\ z \leqslant 0$ que pasa dos veces cuando $-\infty < t < +\infty$; b) para $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ punto $r(t) = \dfrac{t^2+1}{(t+1)^2}\, i + \dfrac{2t}{(t+1)^2}\, j$ recorre dos veces la semirrecta $x + y = 1,\ x \geqslant \dfrac{1}{2},\ y \geqslant \dfrac{1}{2}$; c) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1; \end{matrix}\right\}$

d) $y = \dfrac{x^2}{3},\ z = \dfrac{x^3}{9}$; e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x - y = 0$.

7. $i + k$. **8.** $i + k$. **9.** $-j + \dfrac{1}{2\pi}\, k$.

10. $-i + k$. **11.** $ei - j + 2k$. **12.** No. **14.** No.

17. a) $2\left(\dfrac{dr}{dt}, r\right)$; b) $\left|\dfrac{dr}{dt}\right|^2 + \left(r, \dfrac{d^2r}{dt^2}\right)$; c) $\left[r, \dfrac{d^2r}{dt^2}\right]$.

21. Las circunferencias que se encuentran en los planos perpendiculares al vector a.

22. La hodógrafa de velocidad es la línea helicoidal: $x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ z = 2bt$; la hodógrafa de aceleración es la circunferencia: $x = -a \operatorname{sen} t,\ y = a \cos t,\ z = 2b$.

26. $\dfrac{da}{dt} = \dfrac{da}{du}\dfrac{du}{dt}$; $\dfrac{d^2a}{dt^2} = \dfrac{d^2a}{du^2}\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \dfrac{da}{du}\dfrac{d^2u}{dt^2}$.

28. $(t-1)\, e^t i + \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) j - \operatorname{arctg} t \cdot k + c$.

29. $\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \cdot i + \dfrac{1}{2}\, e^{t^2} j + \operatorname{sen} t \cdot k + c$.

30. $e^{\operatorname{sen} t} \cdot i - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t^2 \cdot j + tk + c$.

31. $\dfrac{t^3}{6}\, i + (t \cos t - \operatorname{sen} t)\, j + \dfrac{2^t}{\ln 2}\, k + c$.

32. $\frac{2}{3}j+\pi k$. 33. $(1-e^{-\frac{1}{2}})i+(e^{\frac{1}{2}}-1)j+(e-1)k$

34. $-\ln 2\cdot j+k$. 35. $2\pi^2 i+\pi j+\pi^2 k$.

36. $R=\frac{\sqrt{2}}{|\operatorname{sen} 2t|}$. 37. $R=\frac{2}{3}|t|(1+9t^2)^{3/2}$

38. $R=6$. 39. $R=\frac{1}{2}a\pi$.

40. $R=2a\operatorname{ch}^2 t$. 41. $x+y=0$. 42. $x-y-\sqrt{2}z=0$.

43. $\frac{1}{T}=\frac{1}{3}$. 44. $\frac{1}{T}=\frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$.

45. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=C$ es la familia de elipsoides de tres ejes.

46. $x^2+y^2-z=C$ es la familia de paraboloides.
47. $x^2+y^2=Cz$ es la familia de paraboloides.
48. $2y^2+9z^2=C$ es la familia de cilindros elípticos.
49. $x+2y-z=C$ es la familia de los planos paralelos.
50. Familia de semiplanos que se obtiene de un haz de planos $a_1x+a_2y+a_3z=C(b_1x+b_2y+b_3z)$, que pasan por la recta

$$\left.\begin{aligned} a_1x+a_2y+a_3z&=0,\\ b_1x+b_2y+b_3z&=0. \end{aligned}\right\}$$

mediante la exclusión de la propia recta. Aquí a_1, a_2, a_3 son las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$; b_1, b_2, b_3 son las coordenadas del vector $\boldsymbol{b}$.
51. $x^2+y^2+z^2=C^2$ es la familia de las esferas concéntricas.

52. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{r})=C$ ó $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=C$ es la familia de los planos paralelos.

53. $2x-y=C$ es la familia de rectas paralelas.
54. $y=Cx$, $C>0$, $x\neq 0$, es la familia de rayos con el vértice excluido $O(0,0)$.
55. $y^2=Cx$ es la familia de parábolas.
56. $x^2-y^2=C$ es la familia de hipérbolas.
57. $y=-x\ln C-C$, $C>0$ es la familia de rectas.

58. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 59. $\frac{-\sqrt{21}}{3}$. 60. $\frac{\sqrt{3}}{3}e^3$. 61. $-\frac{2}{5}$. 62. $\frac{3}{5}\sqrt{2}$.

63. $\frac{1}{4}$. 64. 0. 65. $\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}+3)$. 66. 0. 67. -2.

68. $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{a^2+R^2}}$. 69. $\dfrac{2}{3}(i+j-k)$.

70. k. 71. $\varphi=\pi$. 72. $\varphi=0$.

73. $\varphi=0$. 74. $y=-x+2n\pi$, $n=0, \pm 1, +2, \ldots$.

75. $x^2+y^2+z^2=1$. 78. $\dfrac{r}{r^2}$. 79. a. 80. $a^*(b, r)+b(a, r)$.

81. $2|a|^2 r-2(a, r)a$. 86. $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{2u}{r}$.

87. $\dfrac{\partial u}{\partial l}=-\dfrac{\cos(\widehat{r, l})}{r^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$ para $r\perp l$.

88. $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{1}{r^2}$. 89. $\dfrac{\partial u}{\partial l}=1$.

90. $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)}{|\operatorname{grad} v|}$; $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$, si $\operatorname{grad} u\perp\operatorname{grad} v$.

91. a) 1 en dirección del eje Oy;
b) 3 en dirección del vector $a=-i-2j+2k$.

92. $y=C_1x$; $z=C_2x$. 93. $\left.\begin{aligned} y&=\dfrac{a_2}{a_1}x+C_1,\\ z&=\dfrac{a_3}{a_1}x+C_2.\end{aligned}\right\}$

94. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=C_1^2,\\ x+y+z&=C_2.\end{aligned}\right\}$ 95. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}=1$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y^2}=4$.

96. $x^2=C_1y$, $z=C_2$. 97. $z=C_1x$, $y=C_2$.

98. $xy=C_1$, $z=C_2$. 99. $x=C_1$, $2y^2-z^2=C_2$.

100. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=C_1$, $z=C_2$.

101. $y^2+z^2=C_1$, $x=C_2$. 102. $x=C_1y$, $x=C_2z$.

103. $\left.\begin{aligned} \dfrac{x}{b_{01}}&=\dfrac{y}{b_{02}}+C_1,\\ \dfrac{x}{b_{01}}&=\dfrac{z}{b_{03}}+C_3,\end{aligned}\right\}$ donde b_{01}, b_{02}, b_{03} son las coordenadas del vector b_0.

104. $\Pi=-3$. 105. $\Pi=\pi R^2\gamma$. 106. $\Pi=\pi R^2h$.

107. $\Pi=4\pi R^3 f(R)$. 108. $\Pi=\dfrac{a^3}{2}$. 109. $\Pi=\dfrac{\pi}{6}$.

110. $\Pi = \frac{1}{2}\pi R^2 h$. **111.** $\Pi = \pi h^3$.

112. $\Pi = \frac{81}{8}\pi$. **113.** $\Pi = \frac{\pi}{4}$.

114. $\Pi = 0$. **115.** $\Pi = \frac{\pi}{2}$. **116.** $\Pi = \frac{1}{4}$. **117.** $\Pi = 4\pi R^3$.

118. a) $\Pi = -\frac{7}{6}$, b) $\Pi = -1/2$; c) $\Pi = \pi$. **119.** $\Pi = 0$.

120. $\Pi = 6\pi R$. **121.** $\Pi = 0$. **122.** $\Pi = \pi$. **123.** $\Pi = 0$.

124. $\Pi = \frac{2}{3}\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. **125.** $\Pi = \frac{3}{8}R^4$.

126. $\Pi = \sqrt{2}\,\pi$. **127.** $\Pi = 45\pi$. **128.** $\Pi = \frac{256}{3}\pi$.

129. $\Pi = 8\pi$. **130.** $\Pi = 0$. **131.** $\psi(r) = \frac{C}{r}$.

132. $7r^4$. **133.** 0. **134.** 0.
135. $\psi(z) = C - z$, $C = \text{const}$. **136.** $\Pi = 4\pi R^3$.
137. $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ $(r \neq 0)$.

143. 16π. **144.** πH^3. **145.** $\frac{32}{3}\pi$. **146.** 0. **147.** $\frac{\pi}{3}$.

148. 4π. **149.** $\frac{19}{3}\pi$. **150.** $\frac{32}{3}\pi$. **151.** $2R^3$.

152. $\frac{81}{8}\pi$. **153.** -1. **154.** $-\pi$.

155. Solinoidal.
156. No solinoidal.
157. Solinoidal.

159. $\varphi(r) = \frac{C}{r^3}$, $r \neq 0$, $C = \text{const}$.

161. $\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}$. **162.** $\ln\frac{r_2}{r_1}$. **163.** $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$. **164.** 0.

166. $-\frac{4}{3}R^3$. **167.** $\frac{41}{6}$. **168.** a) $-\frac{14}{15}$, b) $\frac{2}{3}$. **169.** 0.

170. $\frac{5}{3}$. **171.** $3\sqrt{3}$. **172.** $\frac{1}{35}$.

173. $-\pi a^2$. **174.** 1.

175. -2π. **176.** $-\frac{\pi R^3}{4}$. **177.** $\frac{4}{3}$. **179.** $-2(z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k})$.

180. $3(z^2-x^2)\,\boldsymbol{j}$. 181. $(x+y)\,\boldsymbol{k}$. 191. $\omega=\frac{1}{2}\operatorname{rot} v=-\frac{z}{2}\,\boldsymbol{j}$.

193. $f(x,\ z)=xz+x+z+C$, $C=\text{const}$.

195. 4π. 196. -4π. 197. $\frac{4}{3}$. 198. -2π. 199. $\frac{128}{3}$.

200. 729π. 201. 0. 202. $-\sqrt{2}\,\pi$.
203. $2\omega\pi a^2$. *Indicación.* $v=[\omega,\ r]$.
204. $\mu_c=1$. 205. $\mu_c=3$. 206. Depende.

207. No depende. 208. Depende. 209. -1. 210. $\frac{4}{15}$.

211. 0. 212. $\frac{2}{3}$. 213. $\frac{\pi}{2}$. 214. $\frac{1}{3}$.

216. $\frac{\pi}{2}$. *Indicación.* Completar la vía de integración L con el segmento OA del eje Ox.
217. No. 218. Sí. 219. No. 220. Sí. 221. No.
222. No. 223. Sí. 226. $\varphi=x^2yz$. 227. $\varphi=x+xyz$.
228. $\varphi=x^2y-y^2+xz$. 229. $\varphi=\ln|x+y+z|$.
230. $\varphi=\operatorname{arctg}(xyz)$. 231. $\varphi=r$. 232. $\varphi=\ln r$.

233. $\varphi=\frac{1}{3}r^3$. 234. $\varphi=\alpha x+\beta y+\gamma z+C$, $C=\text{const}$.

235. $\varphi=xy+yz+zx+C$. 236. $\varphi=xy+e^z+C$.
237. $\varphi=e^x\operatorname{sen} y+z+C$. 247. a) Sí; b) no; c) sí.
249. $u=C_1x+C_2$.
250. $u=Ax^2+Bxy-Ay^2$, A y B cualesquiera.

251. $u(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n}{(n-1)\,n}+C_1x+C_2, & \text{si } n\neq 1,\\ x\ln|x|+C_1x+C_2, & \text{si } n=1\ (x\neq 0).\end{cases}$

252. $I=\frac{-4}{15}\pi$. 253. $I=-\frac{\pi}{3}$. 254. $I=\frac{4}{3}\pi R^3$.
255. $I=0$.
256. $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{j}+(y-x)\,\boldsymbol{k}$. 257. $\boldsymbol{b}=(y^2-2xz)\,\boldsymbol{k}$.
258. $\boldsymbol{b}=(e^x-xe^y)\,\boldsymbol{j}$. 259. $\boldsymbol{b}=3x^2\boldsymbol{j}+(2y^3-6xz)\,\boldsymbol{k}$.
260. $\boldsymbol{b}=-x(x+y^2)\,\boldsymbol{j}+(x^3+y^3)\,\boldsymbol{k}$.
261. $\boldsymbol{b}=-(xz^2+yze^{xz})\,\boldsymbol{j}-2xyz\boldsymbol{k}$.
262. $\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(-z\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k})$.
263. $\boldsymbol{b}=-8yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+7xy\boldsymbol{k}$.
264. $\boldsymbol{b}=2xy^2z\boldsymbol{i}-3x^2yz\boldsymbol{j}+x^2y^2\boldsymbol{k}$.

265. $\boldsymbol{b}=\frac{1}{x}\operatorname{sen} xz\cdot\boldsymbol{i}-\frac{1}{z}\operatorname{sen} xz\cdot\boldsymbol{k}$

266. $\boldsymbol{b}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}\,z-\boldsymbol{k}$.

267. a) $\rho = \varphi + C_1$, $\rho = z + C_2$, b) $\left.\begin{array}{l} \rho = \dfrac{1}{\ln C_1 \varphi} \\ \rho = C_2 z \end{array}\right\}$,

c) $\varphi = C_1$, $r = C_2 \operatorname{sen}^2 \theta$.

268. $\operatorname{grad} u = 2(\rho + \cos\varphi)\, \boldsymbol{e}_\rho - \left(2 \operatorname{sen} \varphi + \dfrac{1}{\rho} e^z \cos\varphi\right) \times$

$\times \boldsymbol{e}_\varphi - e^z \operatorname{sen} \varphi \cdot \boldsymbol{e}_z$.

269. $\operatorname{grad} u = (\cos\varphi - 3^\rho \ln 3)\, \boldsymbol{e}_\rho + \left(\dfrac{z}{\rho} \operatorname{sen} 2\varphi - \operatorname{sen} \varphi\right) \times$

$\times \boldsymbol{e}_\varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \boldsymbol{e}_z$.

270. $\operatorname{grad} u = 2r \cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_r - r \operatorname{sen} \theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta$.

271. $\operatorname{grad} u = (6r \operatorname{sen} \theta + e^r \cos\varphi - 1)\, \boldsymbol{e}_r + 3r \cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta -$

$- \dfrac{e^r \operatorname{sen} \varphi}{r \operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_\varphi$.

272. $\operatorname{grad} u = -\mu \left(\dfrac{2\cos\theta}{r^3} \boldsymbol{e}_r + \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{r^3} \boldsymbol{e}_\theta\right)$.

273. $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 2 + \dfrac{z}{\rho} \cos\varphi - e^\varphi \operatorname{sen} z$.

274. $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \dfrac{\varphi}{\rho} \operatorname{arctg} \rho + \dfrac{\varphi}{1+\rho^2} - (z^2 + 2z)\, e^z$.

275. $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 4r - \dfrac{2}{r} \cos^2 \varphi \operatorname{ctg} \theta + \dfrac{1}{r(r^2+1) \operatorname{sen} \theta}$.

276. $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \dfrac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} \theta} \boldsymbol{e}_r - \left(2\cos\theta + \dfrac{\alpha \operatorname{sen} \varphi}{r \operatorname{sen} \theta}\right) \boldsymbol{e}_\theta - \dfrac{\alpha \operatorname{sen} \theta}{r} \boldsymbol{e}_\varphi$.

277. $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = -\dfrac{\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta \cdot \boldsymbol{e}_r + \dfrac{\varphi}{r} \boldsymbol{e}_\theta + \dfrac{2\cos\theta}{r} \boldsymbol{e}_\varphi$.

278. $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = -2\rho \boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho} \boldsymbol{e}_z$.

281. 24π. **282.** $\dfrac{1}{2}\pi$. **283.** 4π. **284.** $\dfrac{2}{3}\pi R^3$.

285. $4\pi R^4$. **286.** $-\dfrac{2}{3} R^3$.

287. 48. *Indicación.* Escribir las ecuaciones de las superficies en las coordenadas esféricas.

288. $u = \rho + \varphi + z + C$.

289. $u = \dfrac{1}{2}(\rho^2 + \varphi^2 + z^2) + C$. **290.** $u = \rho\varphi z + C$.

291. $u = e^\rho \operatorname{sen} \varphi + z^2 + C$. **292.** $u = \rho\varphi \cos z + C$.

293. $u = r\theta + C$. **294.** $u = r^2 + \varphi + \theta + C$.

295. $u=\frac{1}{2}(r\varphi^2+\theta^2)+C$. 296. $u=r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta+C$.

297. $u=e^{\varphi}\operatorname{sen}\theta+\ln(1+\varphi^2)+C$.

298. 1. 299. π^2. 300. $2\pi R$. 301. π^2. 302. 1.

303. $\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$. 304. 0. 305. $-2\pi R^4$. 306. π.

307. π. 308. 0. 309. 0. 310. $\Delta u=4\varphi-\frac{\varphi z}{\rho}+\frac{6\varphi_z^2}{\rho^2}+2\varphi^3$.

311. $\Delta u=6\varphi\theta+12r\varphi^2+\frac{2}{r^2}+\varphi\operatorname{ctg}\theta+\frac{2\theta}{r^2}\operatorname{ctg}\theta+\frac{2r}{\operatorname{sen}^2\theta}$.

312. 1) Sí; 2. No.

313. 1) $u(\theta)=C_1\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|+C_2$, 2) $u(\varphi)=C_1\varphi+C_2$.

314. $u(r)=\begin{cases}\frac{r^{n+1}}{(n+1)(n+2)}+\frac{C_1}{r}+C_2, & n\neq -1,\ -2,\\ \ln r+\frac{C_1}{r}+C_2, & n=-1,\ (r\neq 0)\\ -\frac{\ln r}{r}+\frac{C_1}{r}+C_2, & n=-2.\end{cases}$

SUPLEMENTO I

PRINCIPALES OPERACIONES DEL ANALISIS VECTORIAL EN LAS COORDENADAS ORTOGONALES CURVILINEAS

1. Campo escalar está prefijado en las coordenadas ortogonales curvilíneas $u = u(q_1, q_2, q_3)$. Entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3.$$

Operador de Laplace

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

Casos particulares. a) El campo escalar está prefijado en las coordenadas cilíndricas $u = u(\rho, \varphi, z)$. Entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z.$$

Operador de Laplace

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

b) El campo escalar está prefijado en las coordenadas esféricas $u = u(r, \theta, \varphi)$. Entonces

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Operador de Laplace

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

II. Campo vectorial está prefijado en las coordenadas ortogonales curvilíneas

$$\boldsymbol{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\boldsymbol{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\boldsymbol{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\boldsymbol{e}_3.$$

Entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right],$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{H_2 H_3}\boldsymbol{e}_1 & \frac{1}{H_1 H_3}\boldsymbol{e}_2 & \frac{1}{H_1 H_2}\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}.$$

Casos particulares. a) Campo vectorial está prefijado en las coordenadas cilíndricas

$$\boldsymbol{a} = a_1(\rho, \varphi, z)\,\boldsymbol{e}_\rho + a_2(\rho, \varphi, z)\boldsymbol{e}_\varphi + a_3(\rho, \varphi, z)\,\boldsymbol{e}_z.$$

Entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho a_1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

b) Campo vectorial está prefijado en las coordenadas esféricas

$$\boldsymbol{a} = a_1(r, \theta, \varphi)\,\boldsymbol{e}_r + a_2(r, \theta, \varphi)\,\boldsymbol{e}_\theta + a_3(r, \theta, \varphi)\,\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (a_1 r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial (a_2 \operatorname{sen} \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial a_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta}\boldsymbol{e}_r & \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\boldsymbol{e}_\theta & \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & r a_2 & a_3 r \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix}.$$

SUPLEMENTO II Elementos de areas de las superficies de coordenadas

Coordenadas	Superficies de coordenadas	Elementos de áreas
Generales q_1, q_2, q_3	$q_1=C=\text{const}$ $q_2=C=\text{const}$ $q_3=C=\text{const}$	$dS_1=H_2(C, q_2, q_3)\, H_3(C, q_2, q_3)\, dq_2 dq_3$ $dS_2=H_1(q_1, C, q_3)\, H_3(q_1, C, q_3)\, dq_1 dq_3$ $dS_3=H_1(q_1, q_2, C)\, H_2(q_1, q_2, C)\, dq_1 dq_2$
Cilíndricas $q_1=\rho$ $q_2=\varphi$ $q_3=z$	 $\rho=C=\text{const}$ $\varphi=C=\text{const}$ $z=C=\text{const}$	 $dS=C\,d\varphi\, dz$ $dS=d\rho\, dz$ $dS=\rho\, d\rho\, d\varphi$
Esféricas $q_1=r$ $q_2=\theta$ $q_3=\varphi$	 $r=C=\text{const}$ $\theta=C=\text{const}$ $\varphi=C=\text{const}$	 $dS=C^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$ $dS=r \operatorname{sen} C\, dr\, d\varphi$ $dS=r\, dr\, d\theta$

BIBLIOGRAFIA

Гольдфайн И. А., Векторный анализ и теория поля, ГИФМЛ, 1962. (I. A. Goldfain, Análisis vectorial y la teoría del campo)

2. B. P. Demidovich, Problemas y ejercicios de análisis matemático, 7-a ed., Editorial «Mir», 1980.
3. Кальницкий Л. А., Добротин Д. А., Жевержеев В. Ф., Специальный курс высшей математики, «Высшая школа», 1976. (L. A. Kalnitzki, D. A. Dobrotin, V. F. Zheverzheev, Curso especial de matemáticas superiores)
4. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1951. (N. E. Kochin, Curso del cálculo vectorial y los principios del cálculo tensorial)
5. Кручкович Г. И., Мордасова Г. М., Подольский В. А., Римский-Корсаков Б. С., Сулейманова Х. Р., Чегис И. А., Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики, «Высшая школа», 1970. (G. I. Kruchkovich y otros, Problemas y ejercicios de las temas especiales de matemáticas superiores)
6. Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, том II, «Высшая школа», 1973. (L. D. Kudriavtzev, Análisis matemático, Tomo II)
7. Ладон И. Ф., Основы векторного исчисления с приложениями к теории электромагнитного поля.— Издание ВЭТА, Ленинград, 1938. (I. F. Ladon, Fundamentos del cálculo vectorial con los suplementos a la teoría del campo electromagnético)
8. Лаптев Г. Ф., Элементы векторного исчисления, «Наука», 1975. (G. F. Laptev, Elementos del cálculo vectorial)
9. Мисюркеев И. В., Сборник задач и упражнений по методам математической физики, «Просвещение», 1975 (I. V. Misiurkeev, Problemas y ejercicios de los métodos de la física matemática)
10. Никольский С. М., Курс математического анализа, том II, «Наука», 1973. (S. M. Nikolski, Curso del análisis matemático, Tomo II)

11. Очан Ю. С., Сборник задач по методам математической физики, «Высшая школа», 1967.
(Ya. S. Ochan, Problemas de los métodos de la física matemática)
12. Пчелин Б. К., Векторный анализ для инженеров-электриков и радистов, «Энергия», 1968.
(B. K. Pchelin, Análisis vectorial para los ingenieros electricistas y de radio)

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación cientfífica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, SGP, URSS.

En 1982 Editorial MIR publicará:

I. BRONSHTEIN, K. SEMENDIAEV

MANUAL DE MATEMATICAS PARA INGENIEROS Y ESTUDIANTES

El manual está compuesto por el Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, catedrático K. Semendiáev y por el catedrático I. Bronshtein. Contiene seis secciones: «Tablas y gráficas», «Matemática elemental», «Geometría analítica y diferencial», «Fundamentos del análisis matemático», «Capítulos complementarios del análisis» y «Tratamiento de las observaciones». Las tablas que vienen en el texto se dan con tres o cuatro cifras significativas y contienen los valores de los logaritmos decimales y naturales, las funciones exponenciales, hiperbólicas y trigonométricas, la función Gamma, las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre, las integrales elípticas, la integral de probabilidad y otras tablas.

La matemática elemental comprende el Algebra, la Geometría y la Trigonometría. Los fundamentos del análisis matemático contiene una introducción al análisis, el cálculo diferencial e integral y las ecuaciones diferenciales ordinarias en derivadas parciales de 1° y 2° órdenes.

Los capítulos complementarios del análisis abarcan los números complejos y las funciones de variable compleja, el cálculo vectorial y las series de Fourier (análisis armónico). En la última sección se exponen los fundamentos de la teoría de probabilidades y de la teoría de errores, así como fórmulas empíricas y de interpolación.

Además de la gran cantidad de fórmulas que se exponen, los autores presentan una teoría breve y muestran el modo de resolver los problemas.

El libro está destinado a los estudiantes de las escuelas media y superior, así como a los especialistas.

N. EFIMOV

GEOMETRIA SUPERIOR

En este libro, escrito por el profesor N. Efímov, lauredo con el premio Lenin y Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, se examina un gran número de problemas. Se da la argumentación matemática de: la geometría euclídea, las geometrías no euclídeas de Lobachevski y Riemann, la geometría proyectiva, la geometría de Minkovski y las cuestiones geométricas de la teoría especial de la relatividad, así como una noción general de las formas topológicas de la geometría de la curvatura constante. La obra se divide en tres partes. El material principal se expone en las primeras dos partes. El material de la tercera parte —nociones principales de la geometría de la curvatura constante— puede ser aprovechado en el trabajo de los círculos matemáticos.

El libro se caracteriza por la claridad de su exposición y es comprensible para un amplio círculo de lectores, aunque las cuestiones que trata, por así decirlo, no siempre son sencillas. Esta monografía ha sido reeditada varias veces en la Unión Soviética y en otros países. Está destinada a los estudiantes de los centros docentes superiores, así como a todas aquellas personas que se interesan por las matemáticas.

V. MASLOV

MÉTODOS OPERATORIOS

La obra ofrecida, perteneciente a la pluma del Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas V. Máslov, corresponde a la exposición de un curso de conferencias dictadas por el autor a los estudiantes de la facultad de matemática aplicada del Instituto de Construcción de Máquinas Electrónicas de Moscú. En la cuestiones contemporáneas de la matemática aplicada y de la física teórica, el análisis funcional y la teoría de los operadores lineales desempeñan un papel importante. Al mismo tiempo, los problemas actuales aplicados obligan a tratar las bases del análisis funcional desde otro punto de vista, e, incluso reformular la exposición tradicional de las mismas. Precisamente a este fin sirve este manual de estudio. En los primeros tres capítulos se exponen los principios del análisis funcional, necesarios para el método de resolución de una amplia clase de ecuaciones con derivadas parciales y de ecuaciones en diferencias finitas, propuesto por el autor. A este método se dedican los restantes capítulos del libro. El método de Máslov es una generalización de largo alcance del clásico método de operadores de Laplace—Heaviside. El mismo goza de gran estima en la URSS (en 1979, debido a ello, a esta obra le fue concebido el premio Estatal de la URSS) y en el extranjero.

La exposición tiene una evidente orientación aplicada. En calidad de ejemplos de empleo del método se muestran las resoluciones de muchos problemas físicos importantes.

El libro está destinado a los estudiantes de institutos de enseñanza superior, y será de utilidad a profesores de matemática y a los especialistas.